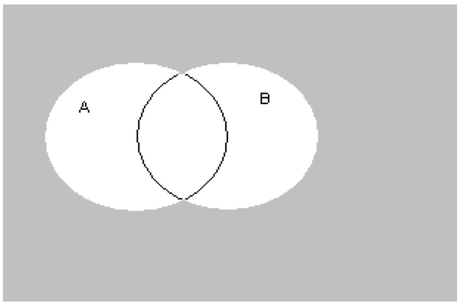
Løsninger av utvalgte oppgaver for uke 4

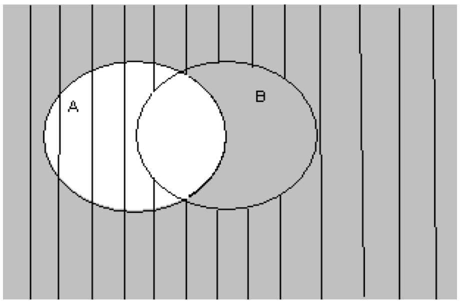
Oppgave 2.11

Vi vil bruke venndiagram til å vise De Morgans lover:

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \tag{1}$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B' \tag{2}$$

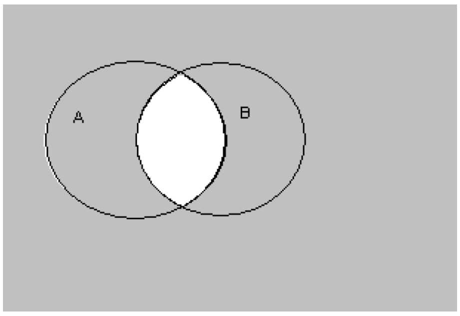
Vi vil først vise (1). Vi ser da på det to venndiagrammene gitt nedenfor:

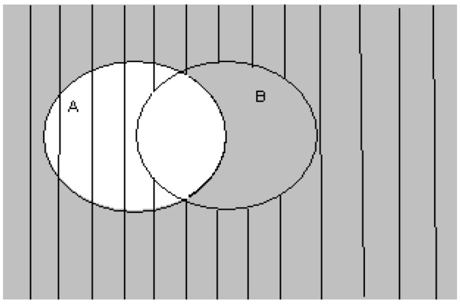




Her svarer det grå området i venndiagrammet til venstre til $(A \cup B)'$. I venndiagrammet til høyre svarer det grå området til A', mens det området som er angitt med sorte striper svarer til B'. Dermed svarer snittet $A' \cap B'$ til det området i venndiagrammet til høydre som både er grått og har sorte striper. Men det er det samme som det grå området i venndiagrammet til venstre. Det viser (1).

Vi vil så vise (2). Vi ser da på disse to venndiagrammene:





Her svarer det grå området i venndiagrammet til venstre til $(A \cap B)'$. I venndiagrammet til høyre svarer $A' \cup B'$ til det området som enten er grått eller har sorte striper (eller begge deler). Men det er det samme som det grå området i venndiagrammet til venstre. Det viser (2).

Oppgave 2.14

Vi velger tilfeldig én student og ser på begivenhetene

$A =$ "studenten har Visa kort" og $B =$ "studenten har MaserCard".

Det er gitt i oppgaven at $P(A) = 0.50$, $P(B) = 0.40$ og $P(A \cap B) = 0.25$.
a) Vi ser her på begivenheten

$A \cup B =$ "studenten har minst ett av de to kortene".

Addisjonssetningen gir at

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.50 + 0.40 - 0.25 = 0.65.$$

Sannsynligheten er 65% for at studenten har minst ett av de to kortene.

b) Her ser vi på begivenheten

$$(A \cup B)' = \text{“studenten har ingen av de to kortene”}.$$

Vi har at

$$P\left((A \cup B)'\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.65 = 0.35.$$

Sannsynligheten er 35% for at studenten ikke har noen av kortene.

c) Vi er nå interessert i begivenheten

$$A \cap B' = \text{“studenten har Visa kort, men ikke MasterCard”}.$$

Vi har at $A = (A \cap B') \cup (A \cap B)$, der begivenhetene $A \cap B'$ og $A \cap B$ er disjunkte. Dermed har vi at

$$P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B),$$

og det følger at

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = 0.50 - 0.25 = 0.25.$$

Sannsynligheten er 25% for at studenten har Visa kort, men ikke MasterCard.

Oppgave 2.18

a) De mulige utfallene er

$$CDP, CPD, DCP, DPC, PCD, PDC$$

Alle de 6 utfallene er like sannynlige, så sannynligheten for hver av dem er lik 1/6.

b) Det et to utfall der C er rangert først (CDP og CPD). Sannsynligheten for at C blir rangert først er derfor lik $2/6 = 1/3$.

c) Det er ett utfall der C er rangert først og D er rangert sist (CPD). Sannsynligheten for at C blir rangert først og D blir rangert sist er derfor lik 1/6.

Oppgave 2.30

Vi vil vise at

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C), \quad (3)$$

jf. formelen øverst på side 62 i læreboka.

For å vise resultatet, bruker vi først addisjonssetningen med begivenhetene $A \cup B$ og C. Det gir

$$P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C). \quad (4)$$

Ved å bruke addisjonssetningen en gang til, har vi at

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (5)$$

Vi har videre at

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

og

$$(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C.$$

Dermed gir addisjonssetningen at

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cap C) &= P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P((A \cap C) \cap (B \cap C)) \\ &= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C). \quad (6) \end{aligned}$$

Ved nå å sette (5) og (6) inn i (4), får vi (3).