Løsninger av utvalgte oppgaver for uke 5

Oppgave 2.32

En jente skal ha et selskap. Hun har 8 flasker zinfandel, 10 flasker merlot og 12 flasker cabernet.

a) Hvis hun serverer 3 flasker zinfandel, kan de serveres på

$$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

måter når vi tar hensyn til rekkefølgen.

b) Hvis hun serverer 6 flasker vin, kan de velges blant de 30 flaskene på

$$\binom{30}{6} = 593\,775$$

måter når vi ikke tar hensyn til rekkefølgen.

c) Antall måter hun kan velge to flasker av hver type på er

$$\binom{8}{2}\binom{10}{2}\binom{12}{2} = 83\,160.$$

d) I punkt b fant vi at hun kan velge 6 flasker på $m = 593\,775$ måter. I punkt c fant vi at hun kan velge to flasker av hver type på $g = 83\,160$ måter. Siden flaskene velges tilfeldig, har vi at

$$P(\text{hun velger to flasker av hver type}) = \frac{g}{m} = \frac{83\,160}{593\,775} = 0.140.$$

e) Hun velger seks flasker av samme type hvis hun velger seks flasker zinfandel, eller hvis hun velger seks flasker merlot, eller hvis hun velger seks flasker cabernet. Antall måter hun kan gjøre det på er

$$\binom{8}{6} + \binom{10}{6} + \binom{12}{6} = 1162.$$

Dermed finner vi at

$$P(\text{hun velger seks flasker av samme type}) = \frac{1162}{593\,775} = 0.0020.$$

Oppgave 2.38

På en fabrikk er det 20 arbeidere på dagskiftet, 15 arbeidere på kveldsskiftet og 10 arbeidere på nattskiftet. Vi velger tilfeldig 6 av arbeiderne.

a) Vi kan velge de 6 arbeiderne fra dagskiftet på $\binom{20}{6} = 38\,760$ måter.

Videre kan vi velge de 6 arbeiderne blant alle de 45 arbeiderne på $\binom{45}{6} = 8\,145\,060$ måter.

Siden de seks arbeiderne velges tilfeldig, har vi at

$$P(\text{alle de seks arbeiderne er fra dagskiftet}) = \frac{38\,760}{8\,145\,060} = 0.0048.$$

b) Vi kan velge de 6 arbeiderne fra samme skift på

$$\binom{20}{6} + \binom{15}{6} + \binom{10}{6} = 43\,975$$

måter. Dermed får vi at

$$P(\text{alle de seks arbeiderne er fra samme skift}) = \frac{43\,975}{8\,145\,060} = 0.0054.$$

c) Begivenhetene "alle de seks arbeiderne er fra samme skift" og "minst to skift er representert" er kompementære begivenheter. Dermed har vi at

P(minst to skift er representert) $= 1 - P$(alle de seks arbeiderne er fra samme skift) $= 1 - 0.0054 = 0.9946$.

d) Vi innfører begivenhetene

- $A =$ dagskiftet er ikke representert i utvalget
- $B =$ kveldsskiftet er ikke representert i utvalget
- $A =$ nattkiftet er ikke representert i utvalget

At minst ett av skiftene ikke er representert i utvalget svarer til begivenheten $A \cup B \cup C$. For å finne sannsynligheten for denne begivenheten, kan vi bruke at (se side 62 i læreboka)

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Vi har nå at

$$P(A) = P(\text{de seks velges fra kvelds- og nattskiftet}) = \frac{\binom{25}{6}}{\binom{45}{6}}$$

$$P(B) = P(\text{de seks velges fra dag- og nattskiftet}) = \frac{\binom{30}{6}}{\binom{45}{6}}$$

$$P(C) = P(\text{de seks velges fra dag- og kveldsskiftet}) = \frac{\binom{35}{6}}{\binom{45}{6}}$$

$$P(A \cap B) = P(\text{de seks velges fra nattskiftet}) = \frac{\binom{10}{6}}{\binom{45}{6}}$$

$$P(A \cap C) = P(\text{de seks velges fra kveldsskiftet}) = \frac{\binom{15}{6}}{\binom{45}{6}}$$

$$P(B \cap C) = P(\text{de seks velges fra dagskiftet}) = \frac{\binom{20}{6}}{\binom{45}{6}}$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(\text{ingen skift er representert}) = 0$$

Vi finner dermed at

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{\binom{25}{6}}{\binom{45}{6}} + \frac{\binom{30}{6}}{\binom{45}{6}} + \frac{\binom{35}{6}}{\binom{45}{6}} - \frac{\binom{10}{6}}{\binom{45}{6}} - \frac{\binom{15}{6}}{\binom{45}{6}} - \frac{\binom{20}{6}}{\binom{45}{6}} + 0 = 0.289.$$

Sannsynligheten er 28.9% for at minst ett skift ikke er represenntert i utvalget

Oppgave 2.61

Vi har begivenhetene A og B, der $P(B) > 0$.
Vi kan skrive begivenheten B som

$$B = (A \cap B) \cup (A' \cap B),$$

der de to begivenhetene på høyre side er disjunkte. Vi har derfor at

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A \cap B'). \qquad (1)$$

Vi dividerer med $P(B)$ på begge sider av (1) og får at

$$\frac{P(B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A' \cap B)}{P(B)}.$$

Ved å bruke definisjonen av betinget sannsynlighet, har vi dermed

$$1 = P(A \mid B) + P(A' \mid B),$$

som er det vi skulle vise.