Løsning av utvalgte oppgaver for uke 6

Oppgave 2.74

Vi har begivenhetene A og B, der $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$ og $P(A \cap B) = 0.25$. Vi skal vise at A og B ikke er uavhengige. Fra definisjonen er A og B uavhengige hvis $P(A|B) = P(A)$. Her har vi

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.25}{0.4} = 0.625$$

som altså er forskjellig fra $P(A) = 0.5$, så A og B kan ikke være uavhengige.

Vi har videre at $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ hvis og bare hvis A og B er uavhengige (multiplikasjonsregelen). Her får vi at $P(A \cap B) = 0.25 \neq 0.20 = 0.5 \cdot 0.4 = P(A) \cdot P(B)$, så A og B må være avhengige.

Oppgave 2.78

Vi har fire ulike blodtyper, og skriver sannsynligheten for at en tilfeldig person i har en bestemt blodtype A, B, AB eller 0 som $P(A_i) = 0.42$, $P(B_i) = 0.10$, $P(AB_i) = 0.04$ og $P(0_i) = 0.44$.

To personer velges tilfeldig. På grunn av uavhengighet har vi

$$P(0_1 \cap 0_2) = P(0_1) \cdot P(0_2) = 0.44 \cdot 0.44 = 0.1936$$

(multiplikasjonsregelen).

Tilsvarende kan vi bruke multiplikasjonsregelen for uavhengighet, samt addisjonsregelen for disjunkte hendelser, til å finne

$$\begin{aligned} P(\text{de to har lik blodtype}) &= P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap B_2) + P(AB_1 \cap AB_2) + P(0_1 \cap 0_2) \\ &= 0.42^2 + 0.10^2 + 0.04^2 + 0.44^2 = 0.3816. \end{aligned}$$

Oppgave 3.14

Vi starter med $p(y) = ky$, for $y = 1, 2, \ldots, 5$.

a) Tipset minner om at summen av alle punktsannsynligheter må være =1. Bruker dette til å finne k på følgende måte:

$$\sum_{y=1}^{5} p(y) = \sum_{y=1}^{5} ky = k\sum_{y=1}^{5} y = 15k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{15}$$

b) $P(Y \leq 3) = p(1) + p(2) + p(3) = \frac{6}{15} = 0.4$
c) $P(2 \leq Y \leq 4) = p(2) + p(3) + p(4) = \frac{9}{15} = 0.6$
d) Her må vi sjekke om disse punktsannsynlighetene summerer til 1:

$$\sum_{y=1}^{5} \frac{y^2}{50} = \frac{1}{50}\sum_{y=1}^{5} y^2 = \frac{55}{50} \neq 1$$

Derfor kan dette forslaget ikke være en lovlig sannsynlighetsfordeling for Y.