Løsning av utvalgte oppgaver for uke 10

Oppgave 4.74

Vi har oppgitt at levetiden (i uker) $X \sim$ gamma(α, β) og at $E(X) = 24$, $V(X) = 12^2$, og skal finne parametrene α og β. Siden $X \sim$ gamma(α, β) impliserer at $E(X) = \alpha\beta$ og $V(X) = \alpha\beta^2$, må vi løse to ligninger med to ukjente:

$$\alpha\beta = 24$$
$$\alpha\beta^2 = 12^2$$

som enkelt gir løsningen $\alpha = 4$, $\beta = 6$.

a)

$$P(12 \leq X \leq 24) = F(24) - F(12) = 0.424.$$

Her er $F(\cdot)$ den kumulative fordelingsfunksjonen i gammafordelingen(4,6), som finnes i Python med $F(\cdot)$=stats.gamma.cdf($\cdot$,4,scale=6). Så det er sannsynlighet 42.4 % for at levetiden vil være mellom 12 og 24 uker.

b)

$$P(X \leq 24) = F(24) = 0.567$$

også funnet med samme funksjon i Python. Vi har altså sannsynlighet 56.7% for at levetiden er mindre enn 24 uker. Medianen må være mindre enn 24 siden $P(X \leq 24) > 0.50$.

c) 99% persentilen i denne fordelingen finnes med stats.gamma.ppf(0.99,4,scale=6) i Python. Vi får 60.3 uker. Det er 99% sannsynlighet for levetid mindre enn 60.3 uker.

d) 0.5% tilsvarer 99.5% persentil. Bruker samme funksjon som over, med 0.995 i stedet for 0.99, og får 65.9 uker. Det er 0.5% sannsynlighet for levetid lenger enn 65.9 uker.

Oppgave 4.80

Vi har $X \sim$ exponential(λ) og skal finne medianen $\tilde{\mu} = x_{0.5}$ der x_p er $100p$-persentilen i fordelingen. For eksponensialfordelingen har vi at kumulativ fordelingsfunksjon er

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x},$$

og vi finner x_p ved å løse

$$F(x_p) = p,$$

som gir

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\lambda x_p} &= p \\ e^{-\lambda x_p} &= 1 - p \\ -\lambda x_p &= \ln(1 - p) \\ x_p &= -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - p). \end{aligned}$$

For å finne medianen, setter vi $p = 0.5$ og får

$$\tilde{\mu} = x_{0.5} = -\frac{1}{\lambda} \ln(1/2) = \frac{1}{\lambda} \ln 2 = \frac{0.693}{\lambda}.$$