STK1100 våren 2023

Transformasjoner av stokastiske variabler

Svarer til avsnitt 5.6 i læreboka

Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

Fordelingen til $Y = h(X_1, X_2)$

Anta at X_1 , X_2 har simultantetthet $f(x_1, x_2)$ og la $u(x_1, x_2)$ være en gitt funksjon

Vi vil finne tettheten til $Y = u(X_1, X_2)$

En mulighet er å først finne den kumulative fordelingen til Y og så derivere for å finne tettheten

Eksempel X_1 , X_2 har simultantetthet

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1 + x_2)} & x_1 > 0,\ x_2 > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Vi vil finne tettheten til $Y = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2}$ (jf forelesningen)

Transformasjoner av to variabler

Eksempel X_1 , X_2 har simultantetthet

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1 + x_2)} & x_1 > 0,\ x_2 > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Vi vil finne simultantettheten $g(y_1, y_2)$ til

$$Y_1 = X_1 + X_2$$

$$Y_2 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$$

og marginaltettheten til Y_2

Anta at X_1 , X_2 har simultantetthet $f(x_1, x_2)$ og la

$$S = \{(x_1, x_2) : f(x_1, x_2) > 0\}$$

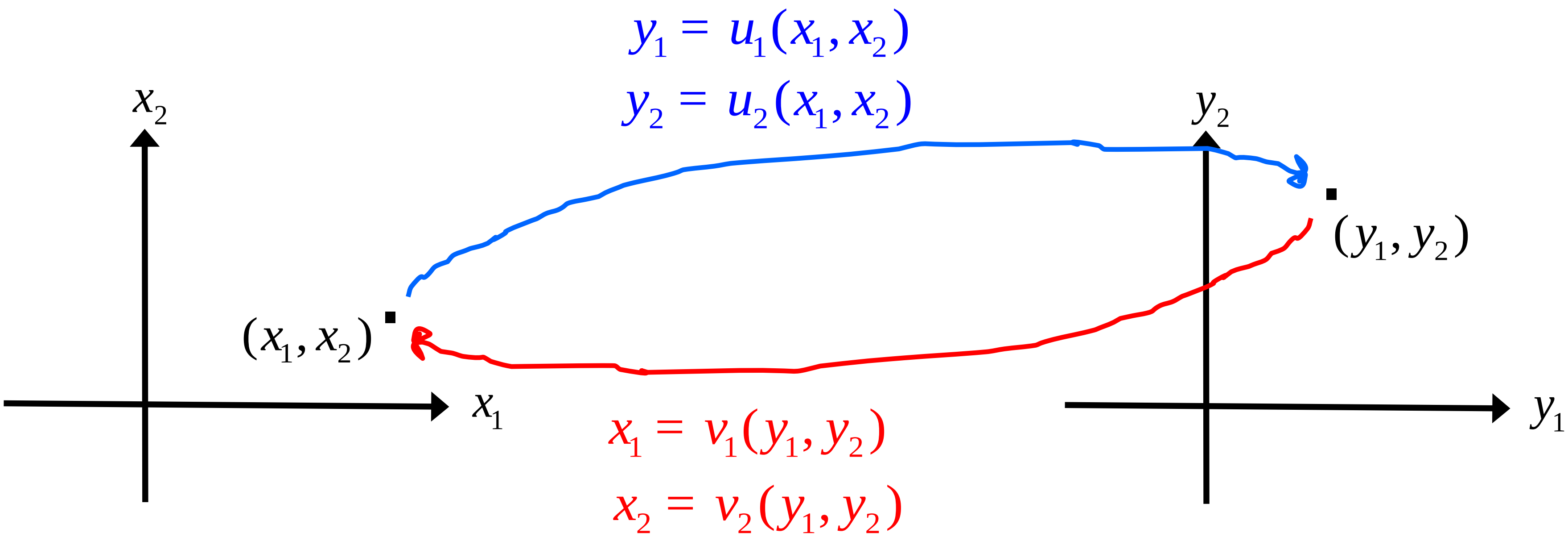
La Y_1 , Y_2 være gitt ved

$$Y_1 = u_1(X_1, X_2)$$

$$Y_2 = u_2(X_1, X_2)$$

La $g(y_1, y_2)$ være den simultane tettheten til Y_1 , Y_2 og la

$$T = \{(y_1, y_2) : g(y_1, y_2) > 0\}$$



Vi antar at $y_1 = u_1(x_1, x_2)$ og $y_2 = u_2(x_1, x_2)$ definerer en én-entydig (injektiv) transformasjon fra S til T

Vi kan da løse $y_1 = u_1(x_1, x_2)$ og $y_2 = u_2(x_1, x_2)$, og få den inverse transformasjonen $x_1 = v_1(y_1, y_2)$ og $x_2 = v_2(y_1, y_2)$

La $B \subset T$ og definer $A \subset S$ ved

$$A = \{(x_1, x_2) : x_1 = v_1(y_1, y_2) \text{ og } x_2 = v_2(y_1, y_2) \text{ for } (y_1, y_2) \in B\}$$

Da har vi at $P\big((Y_1, Y_2) \in B\big) = P\big((X_1, X_2) \in A\big)$

Nå har vi at

$$P\big((Y_1, Y_2) \in B\big) = \iint_B g(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2$$

Ved formelen for variabelbytte i dobbeltintegraler har vi videre at

$$P((Y_1,Y_2)\in B) = P((X_1,X_2)\in A) = \iint_A f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$$

$$= \iint_B f(v_1(y_1,y_2),\, v_2(y_1,y_2))\det M(y_1,y_2)\,dy_1\,dy_2 \qquad (**)$$

der $\det M(y_1,y_2)$ er Jacobi-determinanten

$$\det M(y_1,y_2) = \left|\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(y_1,y_2)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} - \frac{\partial x_2}{\partial y_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2}$$

Siden (*) og (**) gjelder for alle $B \subset T$, gir dette at [for $(y_1,y_2)\in T$]:

$$g(y_1,y_2) = f(v_1(y_1,y_2),\, v_2(y_1,y_2))\left|\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(y_1,y_2)}\right|$$

Eksempel X_1 , X_2 har simultantetthet

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1 + x_2)} & x_1 > 0,\ x_2 > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Vi har transformasjonen

$$Y_1 = X_1 + X_2$$

$$Y_2 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$$

og den inverse transformasjonen

$$X_1 = Y_1 Y_2$$

$$X_2 = Y_1(1 - Y_2)$$

Jacobi-determinanten er

$$\left|\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(y_1,y_2)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 1-y_2 & -y_1 \end{vmatrix} = -\ y_1$$

Den simultane tettheten til Y_1, Y_2 er gitt ved ($y_1 > 0,\ 0 < y_2 < 1$)

$$g(y_1,y_2) = f(y_1 y_2,\ y_1(1-y_2))\left|-y_1\right| = \lambda^2 y_1 e^{-\lambda y_1}$$

Marginaltettheten til Y_2 er ($0 < y_2 < 1$)

$$g_{Y_2}(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1,y_2)\,dy_1 = \int_0^{\infty} \lambda^2 y_1 e^{-\lambda y_1}\,dy_1 = 1$$