# STK1100 våren 2023

# Kombinatorikk

Svarer til avsnitt 2.3 i læreboka

Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

# Uniform sannsynlighetsmodell

Et stokastisk forsøk har $N$ utfall.
Det er de *mulige utfallene* for forsøket.

Vi antar at de $N$ utfallene er *like sannsynlige.*

Da har hvert utfall sannsynlighet $1/N$.

En begivenhet $A$ består av $N(A)$ utfall.
Det er de *gunstige utfallene* for begivenheten $A$.

Sannsynligheten for begivenheten $A$ er

$$\boxed{P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{\text{antall gunstige utfall}}{\text{antall mulige utfall}}}$$

For å bruke en uniform sannsynlighetsmodell må vi finne antall mulige og antall gunstig utfall.

I enkle situasjoner som kast med to terninger kan vi skrive opp alle mulige utfall og alle utfall som er gunstige for den begivenheten vi er interessert i.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1,6) | (2,6) | (3,6) | (4,6) | (5,6) | (6,6) |
| (1,5) | (2,5) | (3,5) | (4,5) | (5,5) | (6,5) |
| (1,4) | (2,4) | (3,4) | (4,4) | (5,4) | (6,4) |
| (1,3) | (2,3) | (3,3) | (4,3) | (5,3) | (6,3) |
| (1,2) | (2,2) | (3,2) | (4,2) | (5,2) | (6,2) |
| (1,1) | (2,1) | (3,1) | (4,1) | (5,1) | (6,1) |

"Sum sju øyne"

"Sum minst ni"

I Lotto er det over 5 millioner mulige vinnerrekker.

Vi må være veldig tålmodige for å skrive opp alle disse!

Vi må derfor kunne beregne antall mulige vinnerrekker uten å skrive dem opp.

*Kombinatorikk* er navnet på den delen av matematikken som gir oss løsningen på dette og liknende problemer.

# Multiplikasjonssetningen for ordnede par

Når vi kaster to terninger er det $6 \cdot 6 = 36$ mulige utfall.

Det er et spesialtilfelle av en generell regel for antall ordende par [dvs. (a,b) er forskjellig fra (b,a)].

Anta at:

- det første elementet i et ordnet par kan velges på $n_1$ måter
- for hvert mulig valg av det første elementet, kan det andre elementet velges på $n_2$ måter

Da er det til sammen $n_1 \cdot n_2$ mulige ordnede par.

# Den generelle multiplikasjonssetningen

Hvis vi kaster tre terninger kan vi gi et utfall som et 3-tuppel, for eksempel (2,6,1).

Antall mulige utfall er $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

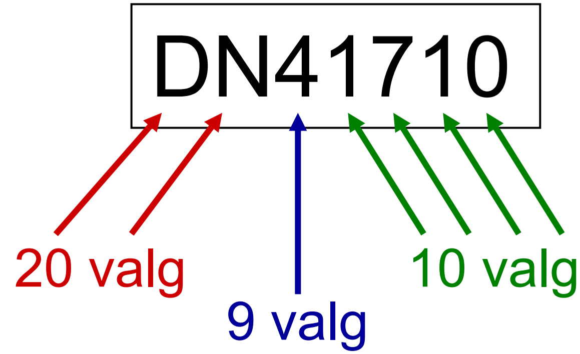
Anta generelt at:

- det første elementet i et *k*-tuppel kan velges på $n_1$ måter
- for hvert mulig valg av det første elementet, kan det andre elementet velges på $n_2$ måter
- …
- for hvert mulig valg av de $k-1$ første elementene, kan det *k*-te elementet kan velges på $n_k$ måter.

Da er det til sammen $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ mulige *k*-tupler.

# Eksempel 1:

Et bilnummer består av to bokstaver og 5 siffer.




Hvor mange bilnummer kan vi lage?

Vi kan lage

$$20 \cdot 20 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 36\,000\,000$$

forskjellige bilnummer.

# Ulike typer utvalg

Vi skriver bokstavene i alfabetet på hver sin lapp og legger de 29 lappene i en eske.

Vi trekker så fire lapper, én etter én.
Vi sier at vi trekker et *utvalg* på fire bokstaver.

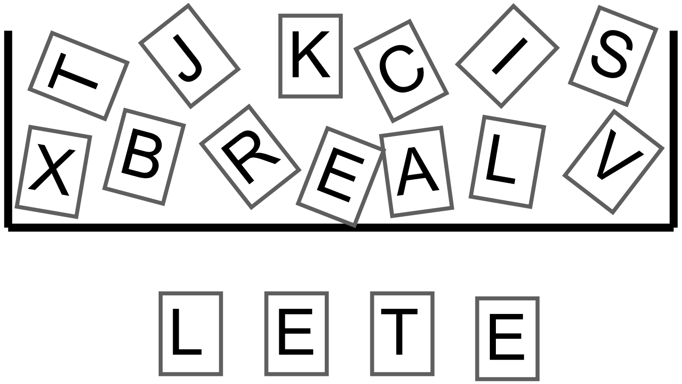
Hvis vi legger en lapp tilbake før vi trekker den neste, trekker vi *med tilbakelegging.*

Hvis vi *ikke* legger lappen tilbake, trekker vi *uten tilbakelegging.*

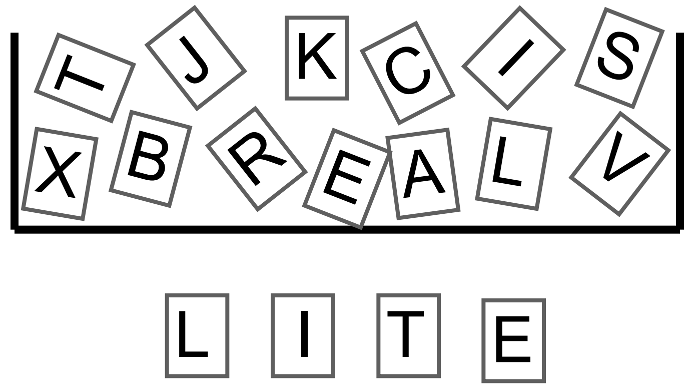
Hvis rekkefølgen bokstavene trekkes i har betydning, trekker vi et *ordnet utvalg.*

Hvis rekkefølgen *ikke* har betydning, trekker vi et *uordnet utvalg.*

Ordnet utvalg
*med* tilbakelegging

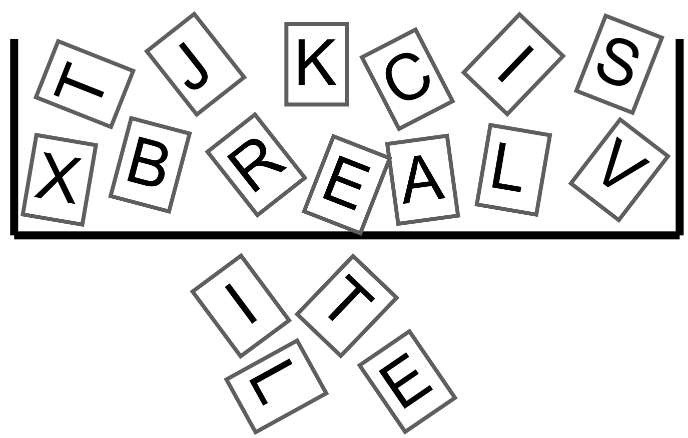



Ordnet utvalg
*uten* tilbakelegging




~~Uordnet utvalg~~
~~*med* tilbakelegging~~

Uordnet utvalg
*uten* tilbakelegging



# Ordnet utvalg med tilbakelegging

Se på bokstaveksempelet.

Hver gang vi trekker er det 29 bokstaver å velge mellom.

Vi kan velge de fire bokstavene på

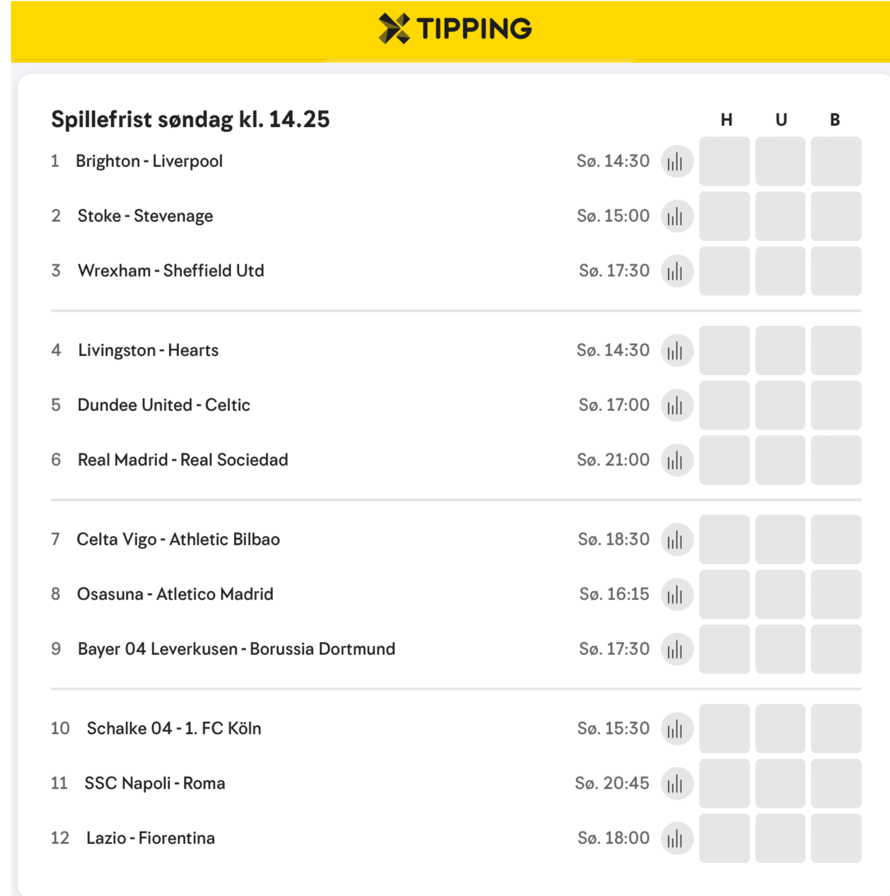
$$29 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29 = 707\,281$$

forskjellige måter når vi tar hensyn til rekkefølgen.

Generelt har vi en mengde med *n* elementer og velger *k* elementer fra mengden med tilbakelegging.

Vi kan lage $\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k \text{ ganger}} = n^k$ ordnede utvalg.

# Eksempel 2:



TIPPING

| Spillefrist søndag kl. 14.25 | | | H | U | B |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Brighton - Liverpool | Sø. 14:30 | | | |
| 2 | Stoke - Stevenage | Sø. 15:00 | | | |
| 3 | Wrexham - Sheffield Utd | Sø. 17:30 | | | |
| 4 | Livingston - Hearts | Sø. 14:30 | | | |
| 5 | Dundee United - Celtic | Sø. 17:00 | | | |
| 6 | Real Madrid - Real Sociedad | Sø. 21:00 | | | |
| 7 | Celta Vigo - Athletic Bilbao | Sø. 18:30 | | | |
| 8 | Osasuna - Atletico Madrid | Sø. 16:15 | | | |
| 9 | Bayer 04 Leverkusen - Borussia Dortmund | Sø. 17:30 | | | |
| 10 | Schalke 04 - 1. FC Köln | Sø. 15:30 | | | |
| 11 | SSC Napoli - Roma | Sø. 20:45 | | | |
| 12 | Lazio - Fiorentina | Sø. 18:00 | | | |

På en tippekupong er det gitt 12 kamper.

For hver kamp skal en tippe H, U eller B.

Hvor mange forskjellige tipperekker kan vi lage?

Vi kan lage

$$3 \cdot 3 \cdots 3 = 3^{12} = 531441$$

forskjellige tipperekker.

# Ordnet utvalg uten tilbakelegging

Se igjen på bokstaveksempelet.

- Første gang er det 29 bokstaver å velge mellom
- Andre gang er det 29-1 bokstaver å velge mellom
- Tredje gang er det 29-2 bokstaver å velge mellom
- Fjerde gang er det 29-3 bokstaver å velge mellom

Vi kan velge de fire bokstavene på

$$29 \cdot (29-1) \cdot (29-2) \cdot (29-3) = 570\,024$$

forskjellige måter når vi tar hensyn til rekkefølgen.

Generelt har vi en mengde med $n$ elementer og vi velger $k$ elementer fra mengden uten tilbakelegging.

Vi kan lage

$${}_nP_k = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}_{k \text{ faktorer}}$$

ordnede utvalg.

Et ordnet utvalg av $k$ elementer fra en mengde av $n$ elementer kalles en permutasjon av størrelse $k$.

Merk! Den nye utgaven av boken bruker notasjonen ${}_nP_k$ i stedet for $P_{k,n}$ (som muligens dukker opp i noe materiale)

Hilsen Realistforeningen!

# Eksempel 3:


Landslagstreneren i langrenn for menn har sju løpere å velge mellom til en World Cup stafett over 4x10 km.

På hvor mange måter kan han sette opp stafett-laget når vi tar hensyn til hvem som skal gå de ulike etappene?

Treneren kan sette opp stafettlaget på

$$_7P_4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

måter.

- Stopp og sjekk!

En klubb har 5 løpere som ønsker å gå 3x5 km stafett.
Hvor mange lagoppstillinger fins det?

- Stopp og sjekk!

En klubb har 3 løpere som skal gå 3x5 km stafett. Hvor mange lagoppstillinger fins det?

Vi har fortsatt en mengde med *n* elementer, og vi velger *k* elementer fra mengden uten tilbakelegging.

Når $k = n$ velger vi alle elementene.

Da svarer et ordnet utvalg til en bestemt rekkefølge (eller permutasjon) av de *n* elementene.

Det er

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

slike rekkefølger.

## Eksempel 4:

Vi ser på eksempel 3 med stafettlaget.

Treneren har bestemt seg for hvilke fire løpere som skal gå stafetten.

Hvor mange lagoppstillinger kan han da velge mellom?

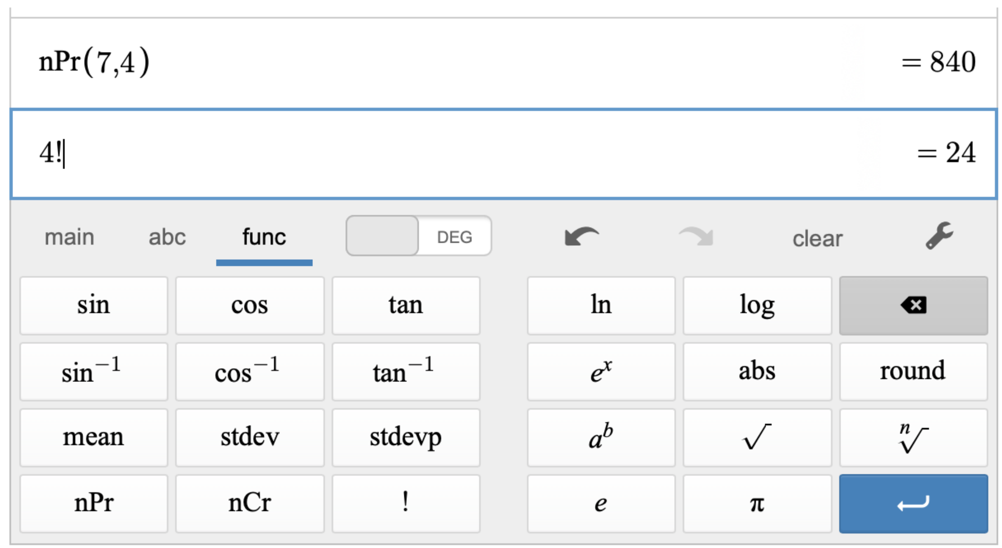
Treneren kan velge mellom

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

lagoppstillinger.

Merk at

$$
\begin{aligned}
{}_nP_k &= n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) \\
&= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)\cdots2\cdot1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdots2\cdot1} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!}
\end{aligned}
$$




Du kan bruke kalkulatoren på desmos.com/scientific til å finne ${}_nP_k$ og $n!$

Også på midtveis-eksamen!

## Eksempel 5:

I en klasse er det 23 elever. Hva er sannsynligheten for at minst to har samme fødselsdag?

Vi regner først ut sannsynligheten for at ingen har samme fødselsdag.

Antall mulige ordnede utvalg: $365^{23}$

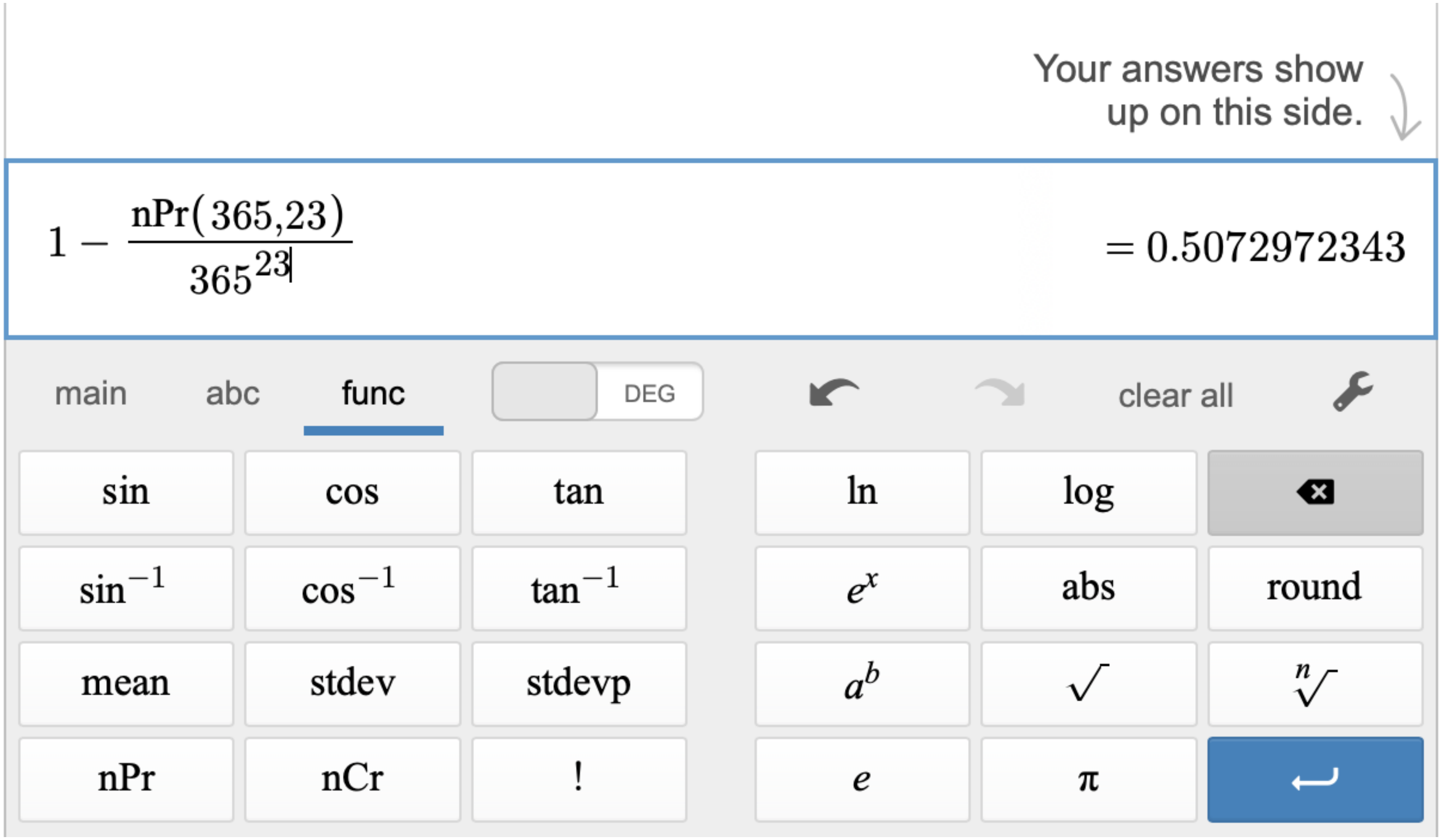
Antall gunstige ordnede utvalg: ${}_{365}P_{23}$

$$P(\text{ingen samme fødselsdag}) = \frac{{}_{365}P_{23}}{365^{23}}$$

$$P(\text{minst to samme fødselsdag}) = 1 - \frac{{}_{365}P_{23}}{365^{23}}$$

Gjør denne beregningen med kalkulator:

- desmos.com/scientific



# Sannsynligheten for at ingen har samme samme bursdag i en gruppe på k personer, som funksjon av k

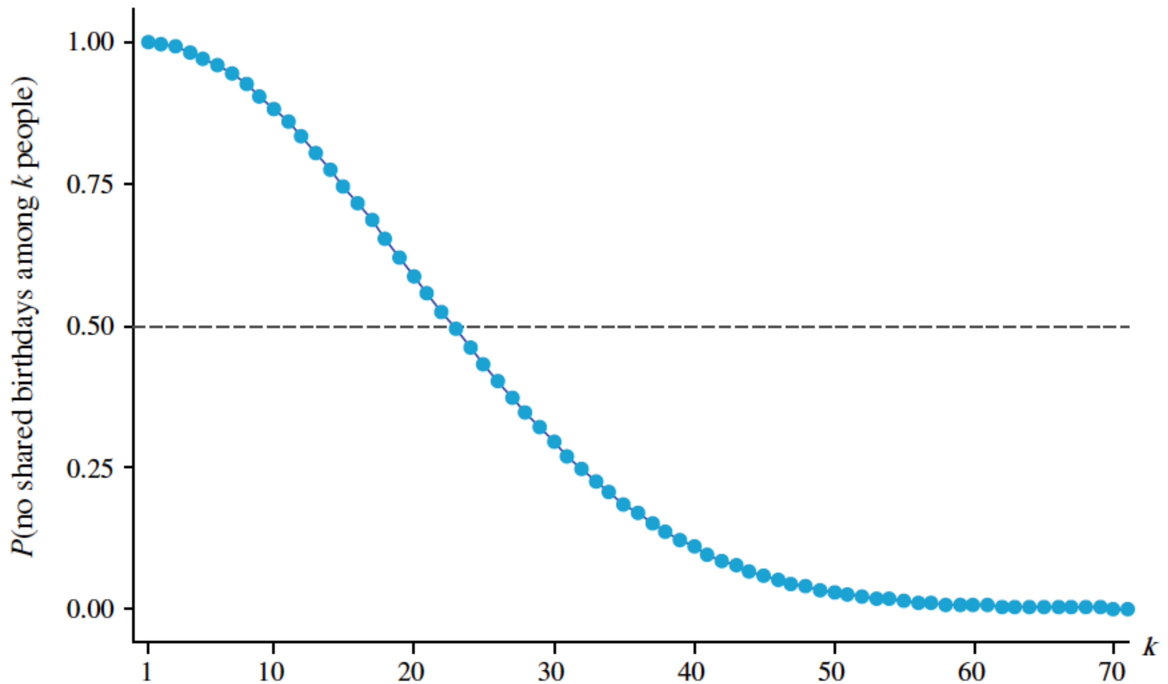



**Figure 2.8** *P*(no birthday match) in Example 2.22

Fra læreboken, s. 69

# Uordnet utvalg uten tilbakelegging

Vi ser på stafetteksempelet.

På hvor mange måter kan treneren velge ut de 4 som skal gå stafetten (blant de 7) når vi *ikke* bryr oss om hvem som skal gå de ulike etappene?

La $x$ være antall måter han kan gjøre det på.

Merk at $x$ er antall *uordnede* utvalg av 4 løpere blant 7 når utvelgingen skjer uten tilbakelegging.

Vi vil bestemme $x$ ved å finne antall *ordnede* utvalg på to måter.

Antall ordnede utvalg av 4 løpere blant 7 løpere er
(jf. eksempel 3)

$${}_7P_4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

Fra ett uordnet utvalg kan man lage

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

ordnede utvalg (jf. eksempel 4).

Vi kan derfor lage $x \cdot 4!$ ordnede utvalg.

Dermed er $x \cdot 4! = {}_7P_4$

Dette gir $x = \dfrac{{}_7P_4}{4!} = \dfrac{840}{24} = 35$

Treneren kan velge ut de som skal gå stafetten på 35 måter når vi ikke bryr oss om hvem som skal gå de ulike etappene.

Generelt har vi en mengde med $n$ elementer.

Vi velger $k$ elementer fra mengden uten tilbakelegging.

Antall uordnede utvalg vi kan lage er:

$$\binom{n}{k} = \frac{{}_nP_k}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Formelen gjelder også for $k = 0$ og $k = n$ siden vi setter $0! = 1$

Enkelte ganger skriver vi ${}_nC_k$ i stedet for $\binom{n}{k}$

$\binom{n}{k}$ kalles en *binomialkoeffisient.*

# Eksempel 6:

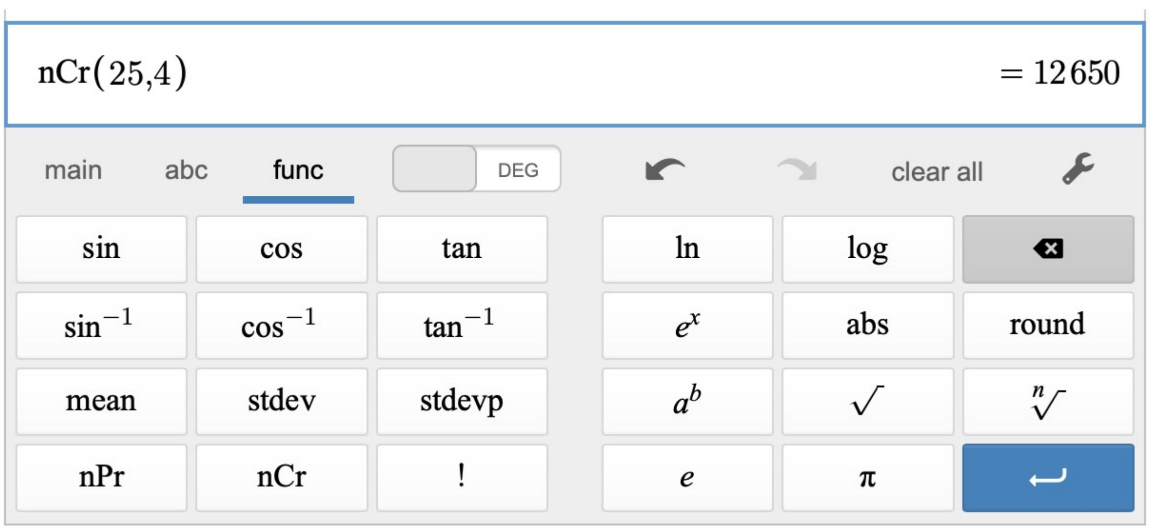
En klasse har 25 elever.

Fire elever skal velges til en festkomité.

Hvor mange måter kan det gjøres på?

De 4 elevene kan velges på $\binom{25}{4}$ måter.

Du kan bruke kalkulatoren til å finne binomialkoeffisienten:



# Eksempel 7:

Når du tipper én lottorekke, krysser du av sju tall fra 1 til 34.

Hvor mange lotto-rekker fins det?

Det fins

$$\binom{34}{7} = 5\,379\,616$$

forskjellige lottorekker.

- Stopp og sjekk!

En klubb har 5 løpere som ønsker å gå 3x5 km stafett. På hvor mange måter kan laget velges?

## Eksempel 8:

En pokerspiller får delt ut fem kort.

Hva er sannsynligheten for at spilleren bare får hjerter?

Antall mulige måter å dele ut fem kort på:

$$\binom{52}{5} = 2598960$$

Antall av disse som gir bare hjerter:

$$\binom{13}{5} = 1287$$

$$P(\text{bare hjerter}) = \frac{1287}{2598960} = 0.0005$$

## Eksempel 9:

En bridgespiller får delt ut 13 kort.

Hva er sannsynligheten for at spilleren får 4 spar, 2 hjerter, 3 kløver og 4 ruter?

Antall mulige måter å dele ut 13 kort på:

$$\binom{52}{13} = 635\,013\,559\,600$$

Antall måter som gir 4 spar, 2 hjerter, 3 kløver og 4 ruter:

$$\binom{13}{4}\binom{13}{2}\binom{13}{3}\binom{13}{4} = 11\,404\,407\,300$$

$$P(4 \text{ spar, } 2 \text{ hjerter, } 3 \text{ kløver, } 4 \text{ ruter}) = 0.018$$