STK1100 våren 2023

Momenter og momentgenererende funksjoner

Svarer til avsnitt 3.4 i læreboka

Matematisk institutt

Universitetet i Oslo

Momenter

La X være en diskret stokastisk variabel med punktsannsynlighet $p(x) = P(X = x)$ for $x \in D$ og forventingsverdi μ

r-te moment for X er gitt ved

$$E(X^r) = \sum_{x \in D} x^r \cdot p(x)$$

Første moment er forventningen μ

r-te sentralmoment for X er gitt ved

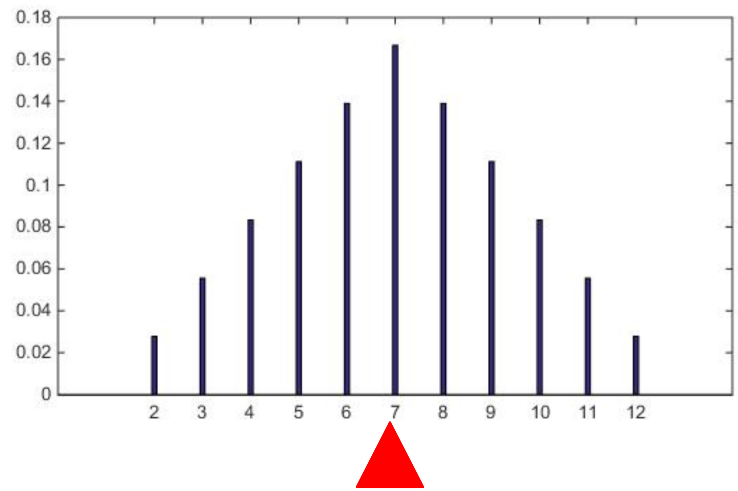
$$E\left[(X-\mu)^r\right] = \sum_{x \in D} (x-\mu)^r \cdot p(x)$$

Andre sentralmoment er variansen σ^2

Skjevhet

Tredje sentralmoment er $E\left[(X-\mu)^3\right]$

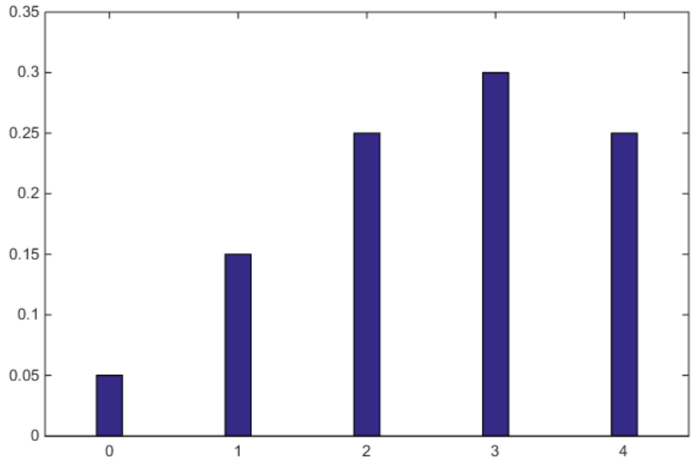
Hvis en fordeling er symmetrisk om μ er tredje sentralmoment lik null



$m = 7$

Skjevheten til en fordeling er gitt ved:

$$\frac{E\left[(X-\mu)^3\right]}{\sigma^3} = E\left\{\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right\}$$

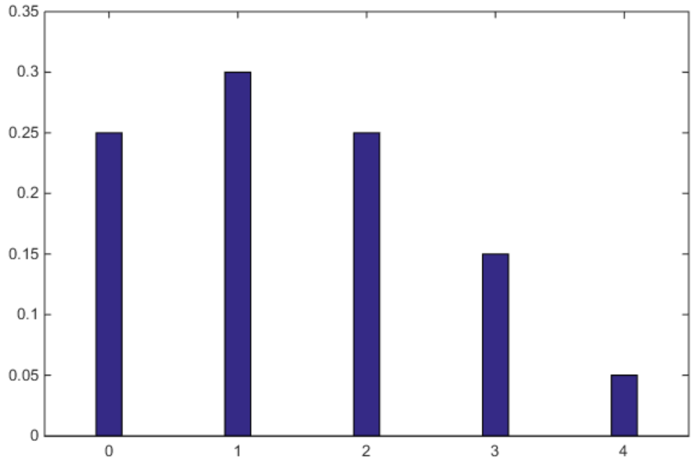


Python kommandoer:

```
import numpy as np
x=np.arange(0,5)
px=np.array([0.05,0.15,0.25,0.30,0.25])
my=np.sum(x*px)
s2=np.sum((x-my)**2*px)
s=np.sqrt(s2)
m3=np.sum((x-my)**3*px)
skjev=m3/s**3
```

Skjevhet -0.41

«skjev mot venstre»



Python kommandoer:

```
import numpy as np
x=np.arange(0,5)
px=np.array([0.25,0.30,0.25,0.15,0.05])
my=np.sum(x*px)
s2=np.sum((x-my)**2*px)
s=np.sqrt(s2)
m3=np.sum((x-my)**3*px)
skjev=m3/s**3
```

Skjevhet 0.41

«skjev mot høyre»

Momentgenererende funksjon (mgf)

La X være en diskret stokastisk variabel med punktsannsynlighet $p(x) = P(X = x)$ for $x \in D$

Momentgenererende funksjon for X er gitt ved

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_{x \in D} e^{tx} \cdot p(x)$$

Vi sier at den momentgenererende funksjonen eksisterer hvis det fins et tall $t_0 > 0$ slik at

$$\sum_{x \in D} e^{tx} \cdot p(x) < \infty$$

for alle $t \in (-t_0, t_0)$

Eksempel: Kast et kronestykke tre ganger

La X = «antall mynt»

Punktsannsynlighet:

x	0	1	2	3
$p(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Momentgenererende funksjon:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{3} e^{tx} \cdot p(x)$$

$$= e^{t\cdot 0}\frac{1}{8} + e^{t\cdot 1}\frac{3}{8} + e^{t\cdot 2}\frac{3}{8} + e^{t\cdot 3}\frac{1}{8} = \frac{1}{8}(e^t + 1)^3$$

Mgf for geometrisk fordeling

Anta at X har punktsannsynlighet

$$p(x) = (1-p)^{x-1} p \quad \text{for} \quad x = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

Momentgenererende funksjon:

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} \cdot p(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} \cdot (1-p)^{x-1} \cdot p$$

$$= pe^t \sum_{x=1}^{\infty} \left[e^t (1-p) \right]^{x-1}$$

$$= \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \qquad \text{så sant } e^t(1-p) < 1$$

Egenskaper til mgf

1) Hvis mgf eksisterer for de stokastiske variablene X og Y og $M_X(t) = M_Y(t)$, så har X og Y samme fordeling

2) $M_X(0) = 1$

3) $M'_X(0) = E(X)$

4) $M''_X(0) = E(X^2)$

5) $M_X^{(r)}(0) = E(X^r)$

6) Hvis a og b er konstanter og $Y = aX + b$, så er

$$M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$$

Geometrisk fordeling

Momentgenererende funksjon $M_X(t) = \dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$

Vi finner:

$$M'_X(t) = \frac{pe^t}{\left[1-(1-p)e^t\right]^2} \qquad M''_X(t) = \frac{pe^t + p(1-p)e^{2t}}{\left[1-(1-p)e^t\right]^3}$$

Dermed:

$$E(X) = M'_X(0) = \frac{p}{\left[1-(1-p)\right]^2} = \frac{1}{p}$$

$$E(X^2) = M''_X(0) = \frac{p + p(1-p)}{\left[1-(1-p)\right]^3} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Kumulantgenererende funksjon

For å finne forventing og varians kan det være lettere å se på den kumulantgenererende funksjonen

$$R_X(t) = \ln\left[M_X(t)\right]$$

Vi har da

$$R'_X(t) = \frac{M'_X(t)}{M_X(t)} \quad \text{og} \quad R''_X(t) = \frac{M''_X(t) \cdot M_X(t) - M'_X(t)^2}{M_X(t)^2}$$

Derfor er

$$R'_X(0) = \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} = E(X)$$

$$R''_X(0) = E(X^2) - \left\{E(X)\right\}^2 = V(X)$$

Geometrisk fordeling (forts)

Kumulantgenererende funksjon

$$R_X(t) = \ln\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right) = \ln p + t - \ln\left(1-(1-p)e^t\right)$$

Vi finner:

$$R'_X(t) = 1 + \frac{(1-p)e^t}{1-(1-p)e^t} \qquad R''_X(t) = \frac{(1-p)e^t}{\left[1-(1-p)e^t\right]^2}$$

Dermed:

$$E(X) = R'_X(0) = 1 + \frac{1-p}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

$$V(X) = R''_X(0) = \frac{1-p}{\left[1-(1-p)\right]^2} = \frac{1-p}{p^2}$$