FORMELSAMLING TIL MIDTVEISEKSAMEN I STK1100

(Versjon av 1. mars 2023)

1. Sannsynlighet

La $A, B, A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ være begivenheter, dvs. delmengder av et utfallsrom $\mathcal{S}$.

a) Aksiomene:
Et sannsynlighetsmål P er en funksjon fra delmengder av utfallsrommet $\mathcal{S}$ til de reelle tall som tilfredsstiller

$$P(A) \geq 0$$
$$P(\mathcal{S}) = 1$$
$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad \text{hvis } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ for } i \neq j$$

b) $P(\emptyset) = 0$

c) $P\Big(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$ hvis $A_i \cap A_j = \emptyset$ for $i \neq j$

d) $P(A) = 1 - P(A')$

e) $P(A) \leq 1$

e) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

f) Betinget sannsynlighet:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{hvis } P(B) > 0$$

g) Total sannsynlighet:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i) \quad \text{hvis } \bigcup_{i=1}^{k} B_i = \mathcal{S} \text{ og } B_i \cap B_j = \emptyset \text{ for } i \neq j$$

h) Bayes' setning:

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i)} \quad \text{under samme betingelser som i g)}$$

i) A og B er uavhengige begivenheter hvis $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

j) $A_1, \ldots, A_n$ er uavhengige begivenheter dersom

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$$

for alle delmengder av indekser $i_1, i_2, \ldots, i_k$

k) Produktsetningen:

$$\begin{aligned} & P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \\ = \; & P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

2. Kombinatorikk

a) To operasjoner som kan gjøres på henholdsvis n og m måter kan kombineres på $n \cdot m$ måter.

b) Antall ordnete utvalg med tilbakelegging av r elementer fra en mengde med n elementer er n^r

c) Antall ordnete utvalg uten tilbakelegging av r elementer fra en mengde med n elementer er $n(n-1) \cdots (n-r+1)$

d) Antall måter n elementer kan ordnes i rekkefølge på (permuteres) er $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$

e) Antall ikke-ordete utvalg av r elementer fra en mengde med n elementer er

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

3. Sannsynlighetsfordelinger

a) For en stokastisk variabel X (diskret eller kontinuerlig) er den kumulative fordelingsfunksjonen $F(x) = P(X \leq x)$

b) For en diskret stokastisk variabel X som kan anta verdiene $x_1, x_2, x_3, \ldots$ har vi

$$\begin{aligned} p(x_j) &= P(X = x_j) \\ F(x) &= \sum_{x_j \leq x} p(x_j) \end{aligned}$$

Betingelsene for at $p(x_j)$ skal være en punktsannsynlighet er

$$\begin{aligned} & p(x_j) \geq 0 \quad \text{for alle } j \\ & \sum_j p(x_j) = 1 \end{aligned}$$

c) For en kontinuerlig stokastisk variabel X har vi

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du$$
$$f(x) = F'(x)$$

Betingelsene for at $f(x)$ skal være en sannsynlighetstetthet er

$$f(x) \ge 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

4. Forventning

a) Forventningsverdien til en stokastisk variabel X er definert ved

$$\mathrm{E}(X) = \sum_j x_j p(x_j) \qquad \text{(diskret)}$$
$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \qquad \text{(kontinuerlig)}$$

b) For en reell funksjon $h(X)$ av en stokastisk variabel X er

$$\mathrm{E}[h(X)] = \sum_j h(x_j)p(x_j) \qquad \text{(diskret)}$$
$$\mathrm{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx \qquad \text{(kontinuerlig)}$$

c) $\mathrm{E}(a + bX) = a + b\mathrm{E}(X)$

5. Varians og standardavvik

a) Variansen og standardavviket til en stokastisk variabel X er definert ved

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}[(X - \mu)^2]$$
$$\mathrm{sd}(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$$

b) $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2$

c) $\mathrm{V}(a + bX) = b^2\, \mathrm{V}(X)$

6. Momentgenererende funksjoner

a) For en stokastisk variabel X (diskret eller kontinuerlig) er den momentgenererende funksjonen $M_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$

b) Hvis den momentgenererende funksjonen $M_X(t)$ eksisterer for t i et åpent intervall som inneholder null, så bestemmer den entydig fordelingen til X

c) Hvis den momentgenererende funksjonen $M_X(t)$ eksisterer for t i et åpent intervall som inneholder null, så eksisterer alle momenter til X, og vi kan finne det r-te momentet ved $\mathrm{E}(X^r) = M_X^{(r)}(0)$

d) $M_{a+bX}(t) = e^{at} M_X(bt)$

8. Noen diskrete sannsynlighetsfordelinger

a) Binomisk fordeling:

Punktsannsynlighet: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0, 1, \ldots, n$

Momentgenererende funksjon : $M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n$

Forventning: $\mathrm{E}(X) = np$

Varians : $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$

Tilnærmelse 1: $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ er tilnærmet standard normalfordelt når np og $n(1-p)$ begge er tilstrekkelig store (minst 10)

Tilnærmelse 2: X er tilnærmet Poisson fordelt med parameter $\lambda = np$ når n er stor og p er liten

b) Geometrisk fordeling:

Punktsannsynlighet: $P(X = k) = (1-p)^{k-1} p \qquad k = 1, 2, \ldots$

Momentgenererende funksjon : $M_X(t) = e^t p / [1 - (1-p)e^t]$

Forventning: $\mathrm{E}(X) = 1/p$

Varians: $\mathrm{V}(x) = (1-p)/p^2$

c) Poisson fordelingen:

Punktsannsynlighet: $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad k = 0, 1, \ldots$

Momentgenererende funksjon : $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$

Forventning: $\mathrm{E}(X) = \lambda$

Varians: $\mathrm{V}(X) = \lambda$

9. Noen kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger

a) Normalfordelingen:

Tetthet: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad -\infty < x < \infty$

Momentgenererende funksjon : $M_X(t) = e^{\mu t} e^{\sigma^2 t^2/2}$

Forventning: $\mathrm{E}(X) = \mu$

Varians: $\mathrm{V}(X) = \sigma^2$

Transformasjon: $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow a + bX \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$
$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

b) Eksponentialfordelingen:

Tetthet: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad x > 0$

Momentgenererende funksjon : $M_X(t) = \lambda/(\lambda - t)$ for $t < \lambda$

Forventning: $\mathrm{E}(X) = 1/\lambda$

Varians: $\mathrm{V}(X) = 1/\lambda^2$

c) Gammafordelingen:

Tetthet: $f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \qquad x > 0$

Gammafunksjonen: $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du$
$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$
$\Gamma(n) = (n-1)!$ når n er et helt tall
$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) = 1$

Momentgenererende funksjon : $M_X(t) = [1/(1 - \beta t)]^\alpha$

Forventning: $\mathrm{E}(X) = \alpha\beta$

Varians: $\mathrm{V}(X) = \alpha\beta^2$

d) Kji-kvadratfordelingen:

Tetthet: $f(x) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{(\nu/2)-1} e^{-x/2} \qquad x > 0$
ν er antall frihetsgrader

Forventning: $\mathrm{E}(X) = \nu$

Varians: $\mathrm{V}(X) = 2\nu$

Resultat: $Z \sim N(0, 1) \Rightarrow Z^2 \sim \chi^2_1$

10. Transformasjoner av kontinuerlige stokatiske variabler

a) Anta at X har sannsynlighetstetthet $f(x)$ og la $Y = u(X)$, der u er deriverbar og strengt monoton (vosende eller avtagende). La v være den inverse funksjonen til u, slik at $X = v(Y)$. Da er sannsynlighetstettheten til Y gitt ved

$$g(y) = f(v(y))|v'(y)|$$