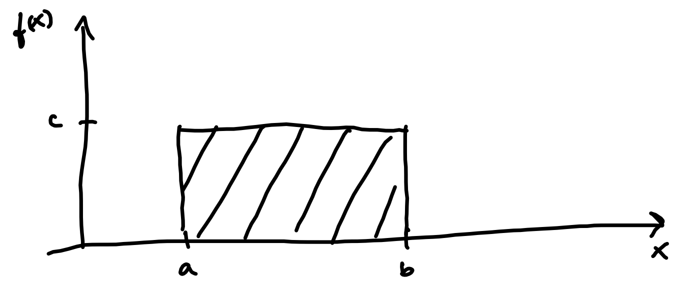
Eksempler på tettheter

Uniform fordeling:

La X være en stokastisk variabel som er kontinuerlig og tar verdier i $[a, b]$

At X er uniformt fordelt, betyr at tettheten er konstant/den samme mellom a og b



Må ha at $f(x) = c$ for alle $x \in [a, b]$

I tillegg må vi ha $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

Derfor kan vi skrive

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{hvis } x \in [a, b] \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Skriver $\boxed{X \underset{\substack{\uparrow \\ \text{har fordelingen}}}{\sim} \text{Unif}[a, b] \qquad \text{boken}}$

$X \sim \text{uniform}(a, b)$

Eksempel 4.5 fra boken

X : skadelig flomhastighet (m^3/s)

$$f(x) = \begin{cases} 0.04\, e^{-0.04(x-10)} & \text{når } x \geq 10 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Er dette en tetthet?

- er $f(x) \geq 0 \quad \forall x$? JA
- er $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$? må vi regne på

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{10} 0\,dx}_{0} + \int_{10}^{\infty} 0.04\, e^{-0.04(x-10)}\,dx$$

substituerer $t = x-10$

$$= \int_{0}^{\infty} 0.04\, e^{-0.04t}\,dt = -e^{-0.04t}\Big]_0^{\infty} = 0-(-1) = \underline{\underline{1}}$$

JA!

Hva er sannsynligheten for at flomhastigheten er maks $50\ m^3/s$?

$$P(X \leq 50) = \int_{-\infty}^{50} f(x)\,dx = \int_{10}^{50} 0.04\, e^{-0.04(x-10)}\,dx$$

subst. $t = x-10$

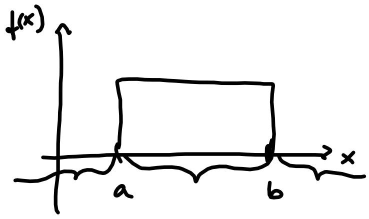
$$= \int_{0}^{40} 0.04\, e^{-0.04t}\,dt = -e^{-0.04t}\Big]_0^{40}$$

$$= -e^{-0.04\cdot 40} - (-1)$$

$$= 1 - e^{-1.6} = \approx 80\,\%$$

Kumulativ fordelingsfunksjon

Uniform fordeling på $[a, b]$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{hvis } x \in [a,b] \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$F(x) = ?$ må dele opp i 3 områder

① $x < a$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

② $x \in [a, b]$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{a} 0\,dt}_{=0} + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\,dt$$

$$= \frac{t}{b-a}\Big]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

③ $x > b$

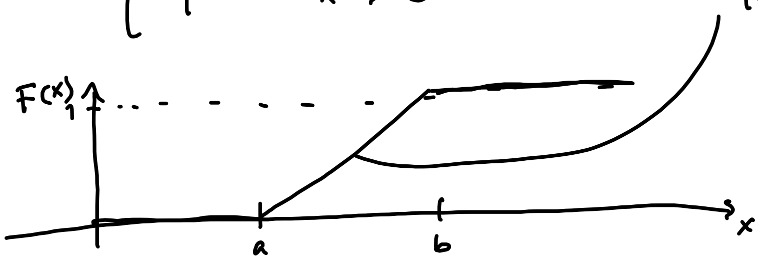
$$F(x) = P(X \leq x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{a} 0\,dt}_{0} + \underbrace{\int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,dt}_{=1} + \underbrace{\int_{b}^{\infty} 0\,dt}_{0} = 1$$

Så

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a,b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

linear!

hvor bratt avhenger av a og b

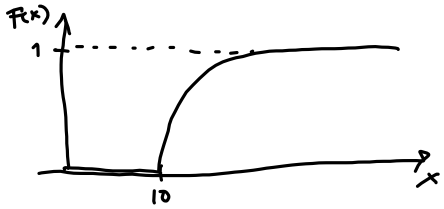


Hjemmelekse :

Overbevis deg selv om at for flomhastighet med tettheten $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 10 \\ 0.04\, e^{-0.04(x-10)} & x > 10 \end{cases}$

da er

$$\longrightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{når } x < 10 \\ 1 - e^{-0.04(x-10)} & \text{når } x \geq 10 \end{cases}$$



Persentiler flom

La $p \in [0,1]$ og $\eta(p)$ tilhørende persentil

$$p = F(\eta(p))$$

$$p = 1 - e^{-0.04(\eta(p) - 10)}$$ løser mhp. $\eta(p)$

⋮

$$\eta(p) = 10 - \frac{1}{0.04} \ln(1-p)$$ ⟵ setter inn

Eks. median

$$\tilde{\mu} = \eta(0.5) = 10 - \frac{1}{0.04} \ln(1-0.5) = 27.33 \ m^3/s$$

Forventet flomhastighet

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_{10}^{\infty} x \cdot 0.04\, e^{-0.04(x-10)}\, dx$$

her trenger vi delvis integrasjon ....

$$= \underline{\underline{35}}$$