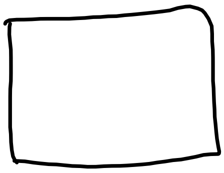
Eksempel : Kast to terninger

X = summen av antall øyne

S



36 antall utfall

Vi har

$X(\{1,1\}) = 1+1 = 2$

$X(\{4,2\}) = 4+2 = 6$

$X(\{3,3\}) = 3+3 = 6$

$X(\{5,6\}) = 5+6 = 11$

Eks Kast en penge tre ganger

La X = antall mynt

KKM
MMM
osv.

Vi har 8 mulige utfall, og alle er like sannsynlige, dvs. de har sannsynlighet 1/8 hver

Vi har

$p(0) = P(X=0) = P(\{KKK\}) = \frac{1}{8}$

$p(1) = P(X=1) = P(\{MKK\} \cup \{KMK\} \cup \{KKM\})$

$\overset{\text{disj.}}{=} \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$

$p(2) = P(X=2) = P(\{MMK\} \cup \{MKM\} \cup \{KMM\})$

$= \frac{3}{8}$

$p(3) = P(X=3) = P(\{MMM\}) = \frac{1}{8}$

Vi ser at $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$

Eks. Kast terning til første gang du får en sekser

X = antall kast (inkludert den første sekseren)

Vi lar S = sekser og F = ikke sekser

$\uparrow$ suksess $\qquad \uparrow$ failure

Skal finne $P(X=x)$ for $x = 1, 2, \ldots$

Vi får

$$p(1) = P(X=1) = P(S) = \frac{1}{6}$$

$$p(2) = P(X=2) = P(FS) \overset{uavh.}{=} P(F)\cdot P(S) = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$$

$$p(3) = P(X=3) = P(FFS) \overset{uavh.}{=} P(F)\cdot P(F)\cdot P(S) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$$

$$\vdots$$

$$p(x) = P(X=x) = P(\underbrace{FFF\ldots F}_{x-1}S) \overset{uavh.}{=} \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}\cdot\frac{1}{6}$$

dvs. $p(x) = \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}\cdot\frac{1}{6} \qquad x = 1, 2, 3, \ldots$

Sjekker:

$$\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{x} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}\cdot 6 = 1$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} k^x = \frac{1}{1-k}$$

geometrisk sum

og $k < 1$

Eks. X = antall mynt i tre kast

x	0	1	2	3
$p(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$F(0) = P(X \leq 0) = p(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = p(0) + p(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = p(0) + p(1) + p(2) = \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = 1$$

Merk at $F(x)$ er definert for alle verdier av x,

f. eks. desimaltall

$$F(2.4) = P(X \leq 2.4) = P(X \leq 2) = F(2) = \frac{7}{8}$$

Eks. kast terning til første sekser

Vi fant

$$p(x) = P(X=x) = \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \cdot \frac{1}{6} \qquad x = 1, 2, 3, \ldots$$

For $x < 1$ er $P(X=x) = 0$, så $F(x) = 0$

For $x \geq 1$, med x et heltall, får vi

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y=1}^{x} \left(\frac{5}{6}\right)^{y-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{y=0}^{x-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{y}$$

$$= \cancel{\frac{1}{6}} \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{x}}{\cancel{1 - \frac{5}{6}}} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{x}$$

[endelig geometrisk sum $\sum_{y=0}^{n} k^{y} = \frac{1 - k^{n+1}}{1-k}$]

Så vi får

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{[x]} & x \geq 1 \end{cases}$$

der $[x]$ er største heltall $\leq x$