Poisson prosess - eksempel m. eksponensialfordeling

Fødsler på et sykehus
Anta at det i gjennomsnitt skjer 360 fødsler pr. måned
Fødslene ankommer som en Poissonprosess

Hva er α? (forventet antall fødsler per tidsenhet)

Forv. antall pr. måned antas å være 360
—— " —— døgn —— " —— $360/30 = 12$
—— " —— time —— " —— $12/24 = 0.5$

Altså $\alpha = 0.5$ per time

T tid mellom to påfølgende fødsler

$T \sim \exp(\alpha)$ $\alpha = 0.5$

dvs. $\boxed{P(T \le t) = 1 - e^{-\alpha t}}$

Sannsynligheten for mindre enn et kvarter mellom to fødsler:

$$P(T \le 0.25) = 1 - e^{-0.5 \cdot 0.25} = \underline{\underline{0.12}}$$

Sannsynligheten for å vente mer enn to timer

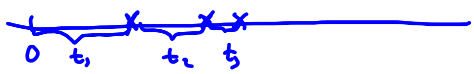
$$P(T > 2) = 1 - P(T \le 2)$$
$$= 1 - (1 - e^{-0.5 \cdot 2}) = \underline{\underline{0.37}}$$

Kan simulere fødsler (generelt en Poissonprosess) på følgende måte:

Trekker n observasjoner fra $\exp(\alpha)$, får verdiene
$t_1, t_2, \dots t_n$

Regn ut

$x_1 = t_1$
$x_2 = t_1 + t_2$
$x_3 = t_1 + t_2 + t_3$
osv



Normalfordeling $Y = aX + b$

X : kroppstemp. tilfeldig valgt person, i °C

Har $X \sim N(37, 0.4^2)$

Y : kroppstemp. i °F

Har $Y = \frac{9}{5}X + 32$

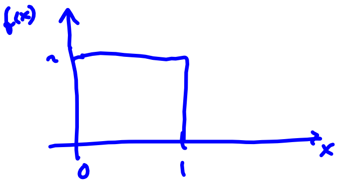
Har da

$$E(Y) = E\left(\frac{9}{5}X + 32\right) = \frac{9}{5}E(X) + 32$$
$$= \frac{9}{5} \cdot 37 + 32 = 98.6 \text{ °F}$$

$$V(Y) = V\left(\frac{9}{5}X + 32\right) = \left(\frac{9}{5}\right)^2 V(X)$$
$$= \left(\frac{9}{5}\right)^2 \cdot 0.4^2$$
$$= (0.72)^2$$

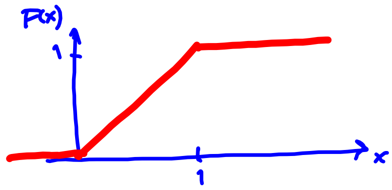
Hvilken fordeling får Y ??

Stokastisk simulering



$X \sim \text{Unif}[0,1]$

$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_0^x 1\,du = x$



$Y = -\ln(1-X)$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-\ln(1-X) \leq y)$

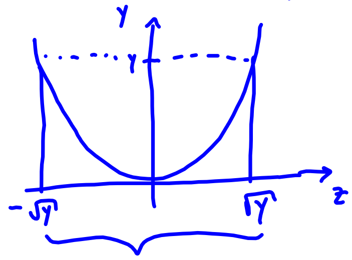
$= P(\ln(1-X) \geq -y)$

$= P(1-X \geq e^{-y})$

$= P(X \leq 1-e^{-y}) = 1-e^{-y}$

$f_Y(y) = F_Y'(y) = e^{-y}$ $\quad \exp(\lambda = 1)$

Ikke-monoton transformasjon (kjikvadrat-fordeling!)



Eks. $Z \sim N(0,1)$

La $Y = Z^2$

Vil finne $f_Y(y)$, starter med $F_Y(y)$

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(Z^2 \le y) \\
&= P(-\sqrt{y} \le Z \le \sqrt{y}) \\
&= P(Z \le \sqrt{y}) - P(Z \le -\sqrt{y}) \\
&= F_Z(\sqrt{y}) - F_Z(-\sqrt{y})
\end{aligned}
$$

Det gir

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) = F_Y'(y) &= \frac{d}{dy}\left[F_Z(\sqrt{y}) - F_Z(-\sqrt{y})\right] \\
&= f_Z(\sqrt{y})\frac{d}{dy}(\sqrt{y}) - f_Z(-\sqrt{y})\cdot\frac{d}{dy}(-\sqrt{y}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{y})^2} \frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(-\sqrt{y})^2} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right) \\
&\vdots \\
&= \frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)} y^{1/2 - 1} e^{-y/2}
\end{aligned}
$$

Dette er gammafordelingen $(\frac{1}{2}, 2)$

Dvs. kjikvadrat-fordelingen med $\nu = 1$