STK 1110, høsten 2004:
Noen supplerende notater og oppgaver

Nils Lid Hjort

– versjon av 20.8.2004 –

1. Om konvergens i fordeling

[Til Ch. 5.] Man sier at X_n *konvergerer i fordeling mot* X, og skriver $X_n \xrightarrow{d} X$, dersom

$$P\{X_n \in (a,b)\} \to P\{X \in (a,b)\} \quad \text{når}\, n \to \infty, \tag{1}$$

for alle intervaller (a,b) – unntatt, eventuelt, der hvor a og b har positiv X-sannsynlighet. Hvis grensevariabelen X er kontinuerlig fordelt skal derfor (1) holde for absolutt alle intervaller (a,b), mens hvis X for eksempel er Poisson-fordelt, så skal (1) holde for alle (a,b) der a og b ikke er heltall.

Merk at bare fordelingene til X_n og X er involvert, ikke f.eks. den helt konkrete variabel X, eller de konkrete verdier variablene X_n og X antar. Hvis f.eks. $X_n \xrightarrow{d} X$, så vil også $X_n \xrightarrow{d} Y$, for hver eneste variabel Y som har lik fordeling med X.

Vi tillater oss å skrive f.eks. $X_n \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0,1)$, og å si at «$X_n$ konvergerer mot $\mathrm{N}(0,1)$», istedetfor å si at «$X_n \xrightarrow{d} X$, der $X \sim \mathrm{N}(0,1)$».

(a) Gi et eksempel der $X_n \xrightarrow{d} X$ og samtidig $X_n \xrightarrow{d} -X$.

(b) La X_n være eksponensialfordelt med parameter θ_n, altså med tetthet $f_n(x) = \theta_n\, e^{-\theta_n x}$ for $x > 0$, og la X være eksponensialfordelt med parameter θ. Vis at hvis $\theta_n \to \theta$, så vil $X_n \xrightarrow{d} X$. Prøv gjerne å generalisere det du finner frem til.

(c) Vis at $X_n \xrightarrow{d} X$ hvis og bare hvis

$$F_n(t) = P\{X_n \le t\} \to F(t) = P\{X \le t\} \quad \text{når}\, n \to \infty, \tag{2}$$

for alle kontinuitetspunkter t for F. (Dette gir en grei reformulering av (1) ved hjelp av de relevante kumulative fordelingsfunksjoner. Rice bruker dette som definisjon av konvergens av fordeling, se s. 166–167.) Hvis X er kontinuerlig fordelt, som svarer til at F er kontinuerlig, så betyr altså $X_n \xrightarrow{d} X$ det samme som at $F_n(t) \to F(t)$ for alle t.

(d) Anta at X_n og X er diskrete variable som kun tar verdier i $\{0,1,2,\ldots\}$. Vis at $X_n \xrightarrow{d} X$ hvis og bare hvis det er korrekt konvergens av punktsannsynlighetene;

$$P\{X_n = j\} \to P\{X = j\} \quad \text{for alle } j = 0,1,2,\ldots.$$

(e) Vis at hvis X_n er binomisk fordelt (n, p_n), der p_n blir mindre når n blir større, på en slik måte at $np_n \to \lambda$, så vil X_n konvergere i fordeling mot Poisson-fordelingen med parameter λ.

2. Konvergens i fordeling via momentgenererende funksjoner

[Til Ch. 5.] Som Rice nevner s. 167 er det slik at om

$$M_n(t) = \mathrm{E}\,\exp(tX_n) \to M(t) = \mathrm{E}\,\exp(tX) \quad \text{når } n \to \infty,$$

for alle t in en omegn om 0, så vil $X_n \xrightarrow{d} X$. Poenget er at det i mange situasjoner er lettere å vise konvergens i fordeling via slike momentgenererende funksjoner.

(a) Vis at hvis X_n har en momentgenererende funksjon $M_n(t)$ som for hver t konvergerer mot $\exp(\frac{1}{2}t^2)$, så vil $X_n \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0,1)$.

(b) La X_n være $\mathrm{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$. Under hvilke omstendigheter vil $X_n \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0,1)$?

(c) Finn den momentgenererende funksjonen for en Poisson-fordeling.

(d) La X_n være Poisson-fordelt med parameter λ. Vis at

$$Z_n = \frac{X_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{når } \lambda \to \infty.$$

Altså kan Poisson-sannsynligheter approksimeres med normal-sannsynligheter, når Poisson-parameteren ikke er for liten.

(e) La nå X_n være binomisk fordelt (n,p), med p fast mens n vokser. Vis at

$$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0,1) \quad \text{når } n \to \infty.$$

Dette er basisresultatet som garanterer at binomiske sannsynligheter kan approksimeres med normalfordelingssannsynligheter. Resultatet har en lang historie, og går tilbake til Abraham de Moivre (1667–1754) og til Pierre Simon Laplace (1749–1827).

3. Fra diskret til kontinuerlig

[Til Ch. 5.] Det er mange situasjoner der X_n er diskret fordelt, men der grensen X blir kontinuerlig fordelt. Eksempler er situasjonene fra oppgaven over, der normalisert Poisson- og binomiske variable konvergerer mot en normalfordeling.

Anta at X_n er uniformt fordelt over punktene $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$, altså med lik sjanse $\frac{1}{n}$ for å anta hver av disse n verdiene. Vis at $X_n \xrightarrow{d} U$, der U er uniformt fordelt over $[0,1]$.

Kan du vise at den momentgenerende funksjonen for X_n konvergerer mot den for U?

4. Om konvergens i sannsynlighet

[Til Ch. 5.] Vi sier at X_n *konvergerer i sannsynlighet mot* a, og skriver $X_n \xrightarrow{p} a$, dersom

$$P\{|X_n - a| \geq \varepsilon\} \to 0 \quad \text{for hver } \varepsilon > 0.$$

Vi sier også at X_n *er konsistent for* a, særlig i situasjoner der a er en parameter og X_n er en estimator for denne, basert på data. Ofte vil n svare til antall datapunkter, eller antall individer i en statistisk studie.

(a) Vis at om $\mathrm{E}X_n = \mu$ for alle n, og $\mathrm{Var}X_n \to 0$, så vil $X_n \xrightarrow{p} \mu$.

(b) Bruk dette til å vise (en versjon av) *de store talls lov*: Om $X_1, X_2, \ldots$ er uavhengige med samme fordeling, som har endelig varians, så vil

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} \mu.$$

(Bruk неравенство Чебышёва.) – Det er pensum å kjenne til at de store talls lov gjelder også uten antagelsen om at X_i-ene skal ha endelig varians; det er nok at de har endelig absolutt forventning, $\mathrm{E}|X| < \infty$. Det er imidlertid matematisk mer krevende å vise resultatet uten variansantagelsen.

(c) Vis at om $X_n \xrightarrow{p} a$ og $Y_n \xrightarrow{p} b$, så vil $X_n + Y_n \xrightarrow{p} a + b$. Generaliser dette resultatet.

(d) Vis til sammenligning at dette ikke er fullt så lett når det gjelder konvergens i fordeling: lag et eksempel der $X_n \xrightarrow{d} X$, der $Y_n \xrightarrow{d} Y$, men der $X_n + Y_n$ slett ikke konvergerer mot $X + Y$ i fordeling.

(e) Vis at om g er kontinuerlig i a, og $X_n \xrightarrow{p} a$, så vil $g(X_n) \xrightarrow{p} g(a)$.

5. Om konvergens i sannsynlighet av vektorer

[Til Ch. 5.] Over har vi sett på konvergens i sannsynlighet av én-dimensjonale variable. Dette lar seg relativt greit generalisere til flerdimensjonale situasjoner. Om X_n og a er vektorer i dimensjon k sier vi at $X_n \xrightarrow{p} a$ dersom

$$P\{\|X_n - a\| \geq \varepsilon\} \to 0 \quad \text{for hver } \varepsilon > 0,$$

der $\|X_n - a\|$ er vanlig euklidsk avstand i $\mathcal{R}^k$.

(a) Vis at $(X_n, Y_n) \xrightarrow{p} (a, b)$ hvis og bare hvis $X_n \xrightarrow{p} a$ og $Y_n \xrightarrow{p} b$. Generaliser til k-dimensjonale vektorer.

(b) La Ω være en delmengde av $\mathcal{R}^k$ som alle X_n-variablene garantert havner i, og anta at $g\colon \Omega \to \mathcal{R}$ er kontinuerlig i punktet a. Vis at hvis $X_n \xrightarrow{p} a$, så vil $g(X_n) \xrightarrow{p} g(a)$. Dette er altså en flerdimensjonal generalisering av resultatet i Oppgave 4.

(c) Anta at $(X_n, Y_n) \xrightarrow{p} (a, b)$. Vis at $\sin(X_n^2 Y_n^3) \xrightarrow{p} \sin(a^2 b^3)$.

6. Glatte funksjoner av gjennomsnitt

[Til Ch. 5.] La $X_1, X_2, \ldots$ være uavhengige og identisk fordelte (u.i.f.) stokastiske variable, med endelig varians σ^2 og forventning μ.

(a) Vis at $\bar{X}_n$ er en konsistent estimator for μ.

(b) Vis at estimatoren

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

også kan skrives som $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}_n^2$. Bruk dette til å vise at S_n er en konsistent estimator for σ. – Merk at vi altså klarer å vise et slikt resultat uten å gå inn på den konkrete fordelingen for S_n (som blir meget komplisert).

(c) Vis mer generelt at enhver glatt funksjon av et sett med gjennomsnitt av funksjoner av data konvergerer i sannsynlighet:

$$g\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_1(X_i), \dots, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_k(X_i)\Big) \xrightarrow{p} \theta = g(\xi_1, \dots, \xi_k),$$

der $\xi_1 = \mathrm{E}h_1(X), \dots, \xi_k = \mathrm{E}h_k(X)$.

(d) Man definerer *skjevheten* av en stokastisk variabel X som

$$\gamma = \mathrm{E}\Big(\frac{X-\mu}{\sigma}\Big)^3,$$

der μ og σ er forventning og standardavvik for X. Hva er skjevheten for en normalfordeling?

(e) Vis at estimatoren

$$\widehat{\gamma}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{X_i - \bar{X}_n}{S_n}\Big)^3$$

er en konsistent estimator for γ. Generaliser gjerne dette resultatet.

(... Flere notater og oppgaver vil følge ...)