Fasit eksamen 5/12: STK1110-h05

Oppgave 1

a) Se Rice s. 178.

b) Se Rics 2. 182 , bevis for "Corrolary B".

Oppgave 2 , jfr. oppgave 2 oblig 2.

a) Se Rice s. 247 "Example A" og Rice s. 254 "Example A".

b) $E[\hat{\lambda}] = \lambda, Var[\hat{\lambda}] = \lambda/n$ Konsistens: Bruk Chebysjevs ulikhet eller at konsisens følger av forventningsretthet og at variansen går mot null.

c) Rimelig: $\hat{\lambda}$ er en forventningsrett estimator for λ. Store verdier av $\hat{\lambda}$ tyder derfor på at H_0 er gal og bør forkastes.
Nivåkrav: $P(\hat{\lambda} > k) \leq 0.05$, $P(\hat{\lambda} \leq k) = P(\sum_{i=1}^{5} X_i \leq 5k) \geq 0.95$. Av tabellen følger $5k \geq 9$. For å få stor styrke velges k minst mulig, altså $k = 1.8$

d) Estimat for λ er $8/5 = 1.6 < k$, ingen forkastning.
P-verdi: $P(\hat{\lambda} \geq 1.6) = P(\sum_{i=1}^{5} X_i \geq 8) = 1 - P(\sum_{i=1}^{5} \leq 7) = 1 - 0.8666 = 0.1334$

e) $P(\hat{\lambda} \geq 1.8 | \lambda = 3) = P((5\hat{\lambda} - 5\lambda)/\sqrt{5\lambda} \geq (5 \times 1.8 - 5\lambda)/\sqrt{5\lambda} | \lambda = 3) = P((\sum_{i=1}^{5} X_i - 5\lambda)/\sqrt{5\lambda} \geq (9 - 15)/\sqrt{15} = -1.55 | \lambda = 3)$, som ved normaltilnærmelsen er omtrent $\Phi(1.55) = 0.9394$.

Oppgave 3

a) Utledning av konfidensintervall: Se notat om konfidensintervall s. 3-4 og Rice s. 390.
Konfidensintervallet har grenser: $0.8 \pm 2.086 \times 5.922\sqrt{1/10 + 1/12}$, dvs. intervallet er $[0.8 - 5.29, 0.8 + 5.29] = [-4.49, 6.09]$.
Tolkning: Se notat om konfidensintervall s. 6 punkt (ii). Legg spesielt merke til hva det ***ikke*** betyr, beskrevet i punkt (iii)).
Test: Intervallet inneholder null, slik at $H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0$ ikke forkastes.

b) Forventet lengde: $2t_{0.975,N-2}E[S_p]\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}$. Siden $(n+m-2)S_p^2/\sigma^2$ er χ^2_{N-2}-fordelt, kan $E[S_p]$ finnes. Det viktige er imidlertid at når $N = m+n$ er fast, varierer $E[S_p]$ ikke. Lengden bestemmes derfor av $\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}$ med $m+n = N$, som minimeres for $m = n = N/2$ når N er like og $m = (N+1)/2$ eller $m = (N-1)/2$ når N er ulike.

Oppgave 4, jfr. oppgave 4 oblig 1.

a)

$$lik(\theta) = \begin{cases} \exp(n\theta - \sum_{i=1}^n x_i) \text{ alle } x_i > \theta \\ 0 \quad \text{ellers} \end{cases} = \begin{cases} \exp(n\theta - \sum_{i=1}^n x_i) \ \min x_i > \theta \\ 0 \quad \text{ellers} \end{cases}$$

Det betyr at $lik(\theta)$ vokser som funksjon av θ til punktet hvor $\theta = \min x_i$ og deretter er lik null. SME er derfor $\hat{\theta} = \min X_i$.

b) For $x > \theta$ er

$$P(\min X_i > x) = P(\text{ alle } X_i > x) = P(X_1 > x)^n = [\exp(-(x-\theta)]^n = \exp(-(nx-n\theta))$$

slik at tettheten er

$$\begin{cases} n\exp(-n(x-\theta)) \ \text{ for } x > \theta \\ 0 \quad \text{ellers} \end{cases}$$