Ekstraoppgave 6

Formålet med denne ekstraoppgaven er å studere egenskapene til minste kvadraters estimator for konstantleddet i en enkel lineær regresjonsmodell, og å bruke det til konfidensintervall og hypotesetesting.

Vi tar for oss den enkle lineære regresjonsmodellen:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Her er x_i-ene gitte tall (dvs. ikke-stokastiske) og ε_i-ene er uavhengige og normalfordelte stokastiske variable med forventningsverdi 0 og standardavvik σ.

Minste kvadraters estimatorer for β-ene er gitt ved

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \quad \text{og} \quad \hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{x}$$

a) Vis at

$$\hat{\beta}_0 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{x_i - \overline{x}}{S_{xx}}\overline{x}\right)Y_i$$

der $S_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

Vink: Bruk omformingen av $\hat{\beta}_1$ gitt nederst på side 627 i læreboka.

b) Vis at $\hat{\beta}_0$ er forventningsrett. Vis også at

$$V(\hat{\beta}_0) = \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{S_{xx}}\right)$$

c) La S^2 være den vanlige forventningsrette estimatoren for σ^2 (jf. sidene 617 og 627 i læreboka), og la

$$S_{\hat{\beta}_0} = S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{S_{xx}}}$$

være den estimerte standardfeilen til $\hat{\beta}_0$. Forklar at

$$\frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{S_{\hat{\beta}_0}}$$

er *t*-fordelt med $n-2$ frihetsgrader.

Vink: Bruk at $\hat{\beta}_0$ og S^2 er uavhengige og at $(n-2)S^2/\sigma^2$ er kjikvadrat-fordelt med $n-2$ frihetsgrader.

d) Bestem et $100(1-\alpha)\%$ konfidensintervall for β_0.

e) Bestem en test med signifikansnivå α for testing av

$$H_0 : \beta_0 = 0 \text{ mot } H_{\mathrm{a}} : \beta_0 = 0$$