Konfidensintervall, Kap. 8 (KI)

$X_i \sim f(x;\theta)$ uif

Anta at vi kan funnet

$L = L(X_1, \dots, X_n)$

$U = U(X_1, \dots, X_n)$ $L < U$

s.a. $P(L < \theta < U) = 1 - \alpha$

Observer vi $X_i = x_i$ og beregner

$l = L(x_1, \dots, x_n)$ og $u = U(x_1, \dots, x_n)$

Da er (l, u) et $(1-\alpha)100\%$ KI for θ.

Ex) $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ uavh, σ^2 kjent.

Da er $\bar{x} \pm 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ et 95% KI for μ.

sep 11-12:17

Ofte vanskelig å finne KI med eksakt konfidensgrad $1-\alpha$. Benytter da kanskje tilnærmede KI.

Ex) $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ uavh, μ og σ^2 ukjent

$\bar{x} \pm 1.96\frac{S}{\sqrt{n}}$ er et tiln. 95% KI for μ. når n er "stor".

Ex) $X_i \sim f(x, \theta)$ uif, $\hat{\theta} = MLE$

og $I(\theta) = Var(\frac{d}{d\theta} \ln f(X_i;\theta)) = -E[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f(X_i;\theta)]$

Da er $\hat{\theta} \pm 1.96/\sqrt{nI(\hat{\theta})}$

et tiln 95% KI

Ex) $X \sim Bin(n, p)$, $\hat{p} = \frac{X}{n} = MLE$, $I(p) = \frac{1}{p(1-p)}$

Så $\hat{p} \pm 1.96\underbrace{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}_{= 1/\sqrt{nI(\hat{p})}}$ er et tiln 95% KI

sep 11-12:25

Men har benyttes med fordel intervallet gitt som løsning av ulikhetene

$$-1.96 < \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} < 1.96$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(n + 1.96^2)}_{a} p^2 + \underbrace{[-2\hat{p} - 1.96^2]}_{b} p + \underbrace{n\hat{p}^2}_{c} \le 0$$

så et 95% KI gis ved

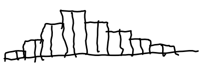
$$(\hat{p}_L, \hat{p}_U) = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dette kalles et Score intervall.

En brukbar tilnærmelse til dette intervallet gis ved $p^* = \frac{x+2}{n+4}$ og $p^* \pm 1.96\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}}$

En ytterligere forbedring oppnås ved kontinuitetskorreksjon.

Ide: Fordelingen til $X \sim Bin(n, p)$ ligger i punktene $x = 0, 1, 2, \dots, n$, $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$



Vil få bedre tiln. til normalfordeling ved legge sannsynlighetsmassen uniformt over $(x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$

sep 11-12:34

8.3 T-fordelingsbaserte KI for μ.

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ uavh, μ, σ^2 ukjente

S^2 = emp. var. $= \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$

og $\bar{x} \pm 1.96\frac{S}{\sqrt{n}}$ tiln. 95% KI – når n stor.

Men i Kap. 6 utledet vi at

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \sim T_{n-1} \text{ fordelt.}$$

Så med $t_{\alpha/2}$ = $(1 - \alpha/2)$ persentil i T_{n-1}

er $P(-t_{\alpha/2} < T < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

$= P(\bar{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}})$

Så $\bar{x} \pm t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$ er et - eksakt - $(1-\alpha)100\%$ KI for μ.

sep 11-12:54

Minne om T-fordelingen

$$T = \frac{Z}{\sqrt{X/v}} \sim t_v\text{-fordelt}$$

når $Z \sim N(0,1)$, $X \sim \chi^2_v$ uavh.

(*) Klokkeformet

(*) Symmetrisk om 0

(*) Tyngre haler enn $N(0,1)$

(*) $T_v \to N(0,1)$ $v \to \infty$

(*) $Var(T_v) = \frac{v}{v-2}$ når $v > 2$

T-intervallene er bredere enn Z-int og brukes ofte når vi har moderat avvik fra normalfordeling og n liten.

Med n stor så er $\bar{x} \pm 1.96\frac{S}{\sqrt{n}}$ et tiln 95% KI og t-korreksjonen gir et litt sikrere intervall.

Men ved små n bør gjøre noe annet:

Bootstrapping

sep 11-13:22

Prediksjonsintervall, PI, for en ny observasjon.

Ex) Temp. 28/8 : 1900 – 2016

Anslag for 2017 = prediksjon

Hva er usikkerheten i prediksjonen?

Ex) Data om lungefunksjon for 5-årige barn

Måler nytt barn.

Er denne målingen så lav at det tilsier astma?

KI: Usikkerhetsintervall for parametre

PI: — " — " — nye observasjoner

sep 11-13:30

Data: $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ uavh.

Ny verdi $X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$ og uavh av X_i, $i = 1, \dots, n$

Da er $\bar{X} - X_{n+1} \sim N\left(0, \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$

Derved $T = \dfrac{\bar{X} - X_{n+1}}{S\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \sim T_{n-1}$ fordelt

Så $1 - \alpha = P(-t_{\alpha/2} < T < t_{\alpha/2})$

$$= \cdots = P\left(\bar{X} - t_{\alpha/2} S\sqrt{1 + \tfrac{1}{n}} < X_{n+1} < \bar{X} + t_{\alpha/2} S\sqrt{1 + \tfrac{1}{n}}\right)$$

$\Rightarrow$ $\bar{X} \pm t_{\alpha/2} S\sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ er et $(1-\alpha)100\%$ PI for X_{n+1}

$$\mathrm{Var}(\bar{X} - X_{n+1}) = \mathrm{Var}(\bar{X}) + \mathrm{Var}(X_{n+1})$$
$$= \frac{\sigma^2}{n} + \sigma^2 = \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, \quad \frac{S^2}{\sigma^2}(n-1) \sim \chi^2_{n-1}$$

Prediksjonsintervallene er sensitive til normalantagelsen - også når n er stor

sep 11-13:37

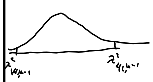
8.4 KI for σ^2 og σ

når $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $i = 1, \dots, n$

Husk $\dfrac{S^2}{\sigma^2}(n-1) \sim \chi^2_{n-1}$ $\left[\begin{array}{l} E(\chi^2_v) = v \\ \mathrm{Var}(\chi^2_v) = 2v \end{array}\right]$

Definer med $\chi^2_{\alpha,v}$: $P(\chi^2_v > \chi^2_{\alpha,v}) = \alpha$

har vi $1 - \alpha = P\left(\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} < \dfrac{S^2}{\sigma^2}(n-1) < \chi^2_{\alpha/2,n-1}\right)$



$$= P\left(\frac{1}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} < \frac{\sigma^2}{S^2(n-1)} < \frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\right)$$

$$= P\left(\frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} < \sigma^2 < \frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\right)$$

$$= P\left(\frac{S\sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}} < \sigma < \frac{S\sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}}\right)$$

Så $\left(\dfrac{S^2(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}, \dfrac{S^2(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\right)$ er et $(1-\alpha)100\%$ KI for σ^2

og $\left(\dfrac{S\sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}}, \dfrac{S\sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}}\right)$ $(1-\alpha)100\%$ KI for σ.

sep 11-13:52