9.5 Valg av tester. Likelihood Ratio Test (LRT)
Pensum: Intro s.467–469 + LRT 475–478
Testprosedyre: Forkast H_0 når testobs. stor nok.
God test? Beste test? For god test?
Hvordan sammenligne tester?
Kan benytte styrkefunksjon, Ex) $H_0: \theta = \theta_0$ mot $H_a: \theta \neq \theta_0$

$$\gamma(\theta) = P(\text{Forkaste } H_0 \mid \theta) = \begin{cases} \alpha = \text{nivå} & \text{når } \theta = \theta_0 \\ 1 - P(\text{Type II feil} \mid \theta) & \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

Ex) $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ uavh, $i = 1, \ldots, n$, σ^2 kjent, $H_0: \mu = \mu_0$ $H_a: \mu > \mu_0$
Forkaster hvis $\bar{x} > z_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} + \mu_0$ (nivå α)
Styrkefunksjonen (utledet tidligere)

$$\gamma_n(\mu) = \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} - z_\alpha\right) = \begin{cases} \alpha & \mu = \mu_0 \\ > \alpha & \mu > \mu_0 \end{cases}$$

Anta nå at $\mu = \mu_0 + \varepsilon$. Da blir

$$\gamma_n(\mu) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\sqrt{n} - z_\alpha\right) \to 1 \quad \text{når } n \to \infty$$

Forkaster altså H_0 med vilkårlig stor sannsynlighet når n blir [illegible].
Tilsv. gjelder generelt. Med stor n forkaster vi H_0 selv alternativet avviker lite fra μ_0.
Og vi liten praktisk signifikans og likevel statistisk signifikans.
Bør velge n passende stor, $n = (z_\beta + z_\alpha)^2 \frac{\sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$ i eksemplet over.

sep 26-12:14

Repetisjon Maximum Likelihood, $X_i \sim f(x, \theta)$ uif

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(X_i, \theta), \quad \text{MLE } \hat{\theta}: L(\hat{\theta}) \geq L(\theta)$$

Regulær MLE $\hat{\theta} \overset{\text{tiln.}}{\sim} N\left(\theta, \frac{1}{n I_n(\theta)}\right)$

der $I(\theta) = -E\frac{\partial^2 \ln f(X;\theta)}{\partial \theta^2} = \text{Var}\left(\frac{\partial \ln f(X;\theta)}{\partial \theta}\right)$
= forv. informasjon.
Dessuten for forv.rett θ^* gjelder $\text{Var}(\theta^*) \geq \frac{1}{nI(\theta)}$
så MLE har optimalitets egenskaper.
Finnes det tilsv. test med optimalitets egenskaper? Ja!
Likelihood Ratio Test (LR-test)
Først θ skalar: $H_0: \theta = \theta_0$ mot $H_a: \theta \neq \theta_0$
Da er Likelihood Ratio $LR = \frac{L(\theta_0)}{L(\hat{\theta})}$ der $\hat{\theta}$ = MLE
Alltid er $L(\theta_0) \leq L(\hat{\theta})$ og $LR \leq 1$
Hvis LR liten indikerer dette at H_0 er usann.
Benytter ofte istedet $-2\ln LR = -2[\ln L(\theta_0) - \ln L(\hat{\theta})]$
$= 2(\ell(\hat{\theta}) - \ell(\theta_0))$
Stor $-2\ln LR$ tyder på at H_0 ikke holder.

sep 26-12:42

Ex) $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $i = 1, \ldots, n$ uavh. $H_0: \mu = \mu_0$ mot $H_a: \mu \neq \mu_0$
σ^2 kjent.
Vet at $\hat{\mu} = \bar{X}$ = MLE

$$LR = \frac{L(\mu_0)}{L(\bar{x})} = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(X_i - \mu_0)^2\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(X_i - \bar{X})^2\right)}$$

Litt regning
Så $-2\ln LR = \frac{2}{2\sigma^2}\left[\sum(X_i - \bar{X})^2 - \sum(X_i - \mu_0)^2\right]$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left[\sum(X_i - \bar{X})^2 - \sum(X_i - \bar{x} + \bar{x} - \mu_0)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left[\sum(X_i - \bar{X})^2 - \left[\sum(X_i - \bar{X})^2 + 2(\bar{X} - \mu_0)\underbrace{\sum(X_i - \bar{X})}_{=0} + n(\bar{X} - \mu_0)^2\right]\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left[n(\bar{X} - \mu_0)^2\right] = \left[\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right]^2 = Z^2$$

der $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$ når $H_0: \mu = \mu_0$
Så den gamle Z-testen er også LRT i dette tilfellet.
Dessuten ser $-2\ln LR = Z^2 \sim \chi^2_1$ under H_0

sep 26-12:52

Generelt (skalar θ, $\hat{\theta}$ = regulær MLE) gjelder tilnærmet når $\theta = \theta_0$

$$-2\ln LR \sim \chi^2_1$$

Argument: La $\hat{I}_n(\theta) = -\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2}$ = observert informasjon.
Da $E\hat{I}_n(\theta) = nI(\theta)$
og $\frac{1}{n}\hat{I}_n(\theta) \to I(\theta)$
samt $\frac{1}{n}\hat{I}_n(\hat{\theta}) \to I(\theta)$ siden $\hat{\theta} \to \theta$.
og $\hat{\theta}$ bet. $\ell'(\hat{\theta}) = 0$

$$-2\ln LR = 2[\ell(\hat{\theta}) - \ell(\theta_0)]$$

2. orden Taylor $= 2\left[\ell(\hat{\theta}) - \left(\ell(\hat{\theta}) + (\theta_0 - \hat{\theta})\ell'(\hat{\theta}) + \frac{1}{2}(\theta_0 - \hat{\theta})^2\ell''(\hat{\theta}) + \text{rest}\right)\right]$

$$\approx (\hat{\theta} - \theta_0)^2 \hat{I}_n(\hat{\theta})$$

Men $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \to N(0, 1/I(\theta_0))$
så derfor $(\hat{\theta} - \theta_0)\sqrt{nI(\theta_0)} \to N(0,1)$
og $(\hat{\theta} - \theta_0)^2 nI(\theta_0) \to \chi^2_1$
Men vi kan bytte ut $nI(\theta_0)$ med $\hat{I}_n(\hat{\theta})$
så også $-2\ln LR \approx (\hat{\theta} - \theta_0)^2 \hat{I}_n(\hat{\theta}) \to \chi^2_1$

sep 26-13:12

Generell hypotese og LR, $X_i \sim f(x; \underset{\sim}{\theta})$, $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_p)$
Ω = parameterrommet = $\{$mulige $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_p)\}$
p-dimensjonal
Ex) $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\underset{\sim}{\theta} = (\mu, \sigma^2)$
$\Omega = \{$mulige $\underset{\sim}{\theta}\} = \{(\mu, \sigma^2): \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$
som har dimensjon $p = 2$.
Vil teste $H_0: \theta \in \Omega_0 \subset \Omega$
mot $H_a: \theta \in \Omega \setminus \Omega_0$
Ex) $H_0: \mu = \mu_0$ mot $H_a: \mu \neq \mu_0$, σ^2 vilkårlig > 0
$\Omega_0 = \{(\mu_0, \sigma^2): \sigma^2 > 0\} = \{\mu_0\} \times \mathbb{R}^+$
som har dimensjon 1
Så Ω_0 = parameterrom under H_0, har dimensjon $q < p$
Ex) $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 kjent, $\Omega = \{-\infty < \mu < \infty\} = \mathbb{R}$
som har dimensjon $p = 1$, men under $H_0: \mu = \mu_0$ blir parameterrommet lik $\Omega_0 = \{\mu_0\}$, dimensjon $q = 0$.

sep 26-13:25

Hvis nå $\hat{\theta}$ = MLE over Ω med dim = p
og $\hat{\theta}_0$ = MLE over Ω_0 — " — $= q$
gjelder tilnærmet at

$$-2\ln LR = -2\ln\frac{L(\hat{\theta}_0)}{L(\hat{\theta})} \sim \chi^2_\nu \quad \text{der } \nu = p - q$$

Skal se på eksempel – T-test –
$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ uavh, $\theta = (\mu, \sigma^2)$ $H_0: \mu = \mu_0$ mot $H_a: \mu \neq \mu_0$
Over $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ vet vi at
MLE $= (\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) = (\bar{X}, \frac{1}{n}\sum(X_i - \bar{X})^2)$
Under $H_0: \mu = \mu_0$, over $\Omega_0 = \{\mu_0\} \times \mathbb{R}^+$ har vi likelihood,
med $\psi = \sigma^2$, gitt ved

$$L(\mu_0, \psi) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\psi}} e^{-\frac{1}{2\psi}(x_i - \mu_0)^2}$$

Dermed

$$\frac{\partial}{\partial \psi}\ln L(\mu_0, \psi) = -\frac{n}{2\psi} + \frac{1}{2\psi^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$$

så MLE for ψ under H_0 blir gitt ved $\frac{\partial}{\partial \psi}\ln L(\mu_0, \psi)\Big|_{\psi = \hat{\psi}} = 0$

$$\Rightarrow \hat{\psi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$$

sep 26-13:34

Vi får dermed

$$LR = \frac{L(\mu_0, \hat\psi)}{L(\bar x, \hat\sigma^2)} = \frac{(\cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}})^n (\frac{1}{\hat\psi})^{n/2} \exp(-\frac{1}{2\hat\psi}\Sigma(x_i-\mu_0)^2)}{(\cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}})^n (\frac{1}{\hat\sigma^2})^{n/2} \exp(-\frac{1}{2\hat\sigma^2}\Sigma(x_i-\bar x)^2)}$$

$$= \left(\frac{\hat\sigma^2}{\hat\psi}\right)^{n/2} \frac{\exp(-\frac{1}{2\cancel{\hat\psi}} n \cancel{\hat\psi})}{\exp(-\frac{1}{2\cancel{\hat\sigma^2}} n \cancel{\hat\sigma^2})} = \left(\frac{\hat\sigma^2}{\hat\psi}\right)^{n/2}$$

$$= \left[\frac{\cancel{\frac{1}{n}}\Sigma(x_i-\bar x)^2}{\cancel{\frac{1}{n}}\Sigma(x_i-\mu_0)^2}\right]^{n/2} = \left[\frac{\Sigma(x_i-\bar x)^2}{\Sigma(x_i-\bar x)^2 + n(\bar x-\mu_0)^2}\right]^{n/2}$$

$$= \left[\frac{1}{1+\frac{n(\bar x-\mu_0)^2}{\Sigma(x_i-\bar x)^2}}\right]^{n/2}$$ så LR liten $\Leftrightarrow$

$\frac{n(\bar x-\mu_0)^2}{\Sigma(x_i-\bar x)^2}$ stor $\Leftrightarrow$ $T^2 = \left[\frac{(\bar x-\mu_0)}{S}\sqrt{n}\right]^2$ stor,

så T-testen for $H_0: \mu=\mu_0$ mot $H_a: \mu \neq \mu_0$ er ekvivalent med LR-testen for samme problem.

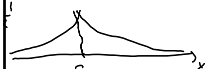
Men: Her trenger vi ikke å bruke $-2\ln LR \sim \chi^2_1$

($\dim \Omega - \dim \Omega_0 = 2-1 = 1$)

siden $T \sim t_{n-1}$ fordelt under $H_0: \mu=\mu_0$

sep 26-13:41

Ex) $X_i \sim f(x;\theta) = \frac{1}{2}\exp(-|x-\theta|)$, $x \in \mathbb{R}$



θ

Dobbel eksponensiell eller Laplace fordeling.

Her blir – faktisk – MLE for θ blir lik

$$\hat\theta = \text{medianen} = \begin{cases} X_{(m+1)} & n = 2m+1 \\ x^* & n = 2m \end{cases}$$

der x^* vilkårlig verdi i $(X_{(m)}, X_{(m+1)})$

og $X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n)}$ ordningsobs.

Test for $H_0: \theta=\theta_0$ mot $H_a: \theta \neq \theta_0$ ved

$LR = \frac{L(\theta_0)}{L(\hat\theta)}$ og $-2\ln LR \overset{tiln}{\sim} \chi^2_1$?

selv om dette ikke er en helt regulær MLE.

sep 26-13:50