UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK 1130 — Modellering av stokastiske prosesser.
Eksamensdag:	Fredag 10. juni 2005.
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Lommekalkulator, Formelsamling for STK1100/1110.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Betrakt en tidshomogen Markovkjede, $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$, med tilstandsrom $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Matrisen med overgangssannsynligheter er

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Hvordan defineres en klasse av tilstander? Og hvordan defineres perioden til en tilstand?

b) Angi denne Markovkjedens klasser og tilstandenes perioder. Begrunn svarene.

c) Er klassene transiente, nullrekurrente eller positiv rekurrente? Begrunn svarene.

d) Denne Markovkjeden har en stasjonær fordeling. Finn den.

e) La $T_j = \min\{n > 0; X_n = j\}$, $j \in S$. Finn (i) $E(T_5 | X_0 = 1)$ og (ii) $P(T_3 < T_5 | X_0 = 1)$.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

På en svært forurenset søpppelfylling blir alle rottene sterile, men populasjonen dør ikke ut fordi det hele tiden skjer immigrasjon av rotter fra området utenfor fyllingen.

La $X(t)$ være antall rotter på fyllingen på tid t. Vi antar at $\{X(t), t \geq 0\}$ er en tidshomogen Markovprosess med kontinuerlig tid, tilstandsrom $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ og

$$p_{ji}(\Delta t) = \begin{cases} \nu \Delta t + o(\Delta t) & \text{hvis } j = i + 1 \\ i\mu \Delta t + o(\Delta t) & \text{hvis } j = i - 1 \\ 1 - (\nu + i\mu)\Delta t + o(\Delta t) & \text{hvis } j = i \\ o(\Delta t) & \text{hvis } |j - i| > 1 \end{cases}$$

der $p_{ji}(t) = P(X(t + u) = j \mid X(u) = i)$.

a) Utled $q_{ii} = p'_{ii}(0)$ og $q_{ji} = p'_{ji}(0)$ for $j \neq i$ (de deriverte av $p_{ji}(t)$ for $t = 0$). Still opp matrisen $Q = (q_{ji})_{j,i \in S}$.

b) Still opp likninger til å bestemme stasjonærfordelingen, $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \ldots)^T$, til $\{X(t), t \geq 0\}$. Vis at

$$\pi_i = \frac{1}{i!}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^i \pi_0, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

passer i likningssystemet, og bestem til slutt $\boldsymbol{\pi}$.

c) La $X(0) = 0$ og utled et sett differensiallikninger til å bestemme $p_{j0}(t)$, $j \in S$. (Vink: Benytt Chapman-Kolmogorov-likningene $p_{j0}(u + t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{jk}(u) p_{k0}(t)$ med $u = \Delta t$.)

d) Vis at $m(t) = E[X(t) \mid X(0) = 0]$ passer i differensiallikningen

$$m'(t) = -\mu\, m(t) + \nu, \qquad m(0) = 0$$

og finn $m(t)$.

e) Det kan vises at den sannsynlighetsgenererende funksjon til $X(t)$ gitt $X(0) = 0$ er

$$P(s, t) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j p_{j0}(t) = \exp\left\{ -\frac{\nu}{\mu}(1 - e^{-\mu t})(1 - s) \right\}$$

Nytt $P(s, t)$ til å finne $p_{j0}(t)$, $j = 0, 1, \ldots$.

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 3.

Betrakt en forgreningsprosess, $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$, der X_n er antall individer i n-te generasjon, $X_0 = 1$. Individ nr. i i n-te generasjon gir opphav til $Y_i^{(n)}$ nye individer i $(n+1)$-te generasjon, slik at

$$X_{n+1} = Y_1^{(n)} + Y_2^{(n)} + \cdots + Y_{X_n}^{(n)}.$$

Alle Y-ene er uavhengige og identisk fordelte med sannsynlighetsfordeling

$$P(Y = k) = p_k\,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

La den sannsynlighetsgenererende funksjon til Y være $f(t) = E(t^Y)$ og sett $m = E(Y)$.

a) Sett $m_n = E(X_n)$ og bruk "dobbel forventning" til å vise at $m_{n+1} = m_n \cdot m$, og uttrykk så m_n ved m.

b) La den sannsynlighetsgenererende funksjon til X_n være $h_n(t)$. Uttrykk $P(X_n = 0)$ ved h_n. Vis at $q^* = P(\text{dø ut}) = \lim_{n\to\infty} P(X_n = 0)$ eksisterer.

c) Gå ut fra som kjent at $h_n(t) = f(h_{n-1}(t))$. Vis at q^* er en løsning av $t = f(t)$.

I resten av denne oppgaven er

$$p_k = q^k \cdot p, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

med $f(t) = p/(1 - qt)$ og $m = q/p$, der $0 < p = 1 - q < 1$.

d) Uttrykk m_n ved p og q. Finn $\lim_{n\to\infty} m_n$ for alle p.

e) Hva er sannsynligheten for at prosessen skal dø ut?

f) Det kan vises at for denne forgreningsprosessen er

$$h_n(t) = \begin{cases} \frac{(m^n-1)-m(m^{n-1}-1)t}{(m^{n+1}-1)-m(m^n-1)t} & \text{hvis } m \neq 1 \\ \frac{n-(n-1)t}{(n+1)-n\,t} & \text{hvis } m = 1 \end{cases}$$

Finn eksplisitte uttrykk for $P(X_n = 0)$ når $m \neq 1$ og når $m = 1$. Kontroller at $q^* = \lim_{n\to\infty} P(X_n = 0)$ stemmer med resultatet i e).

g) La $T = \min\{n > 0; X_n = 0\}$. Finn uttrykk for $P(T \leq n)$ og for $P(T = n)$ når $p = q = \frac{1}{2}$ $(m = 1)$. Vis at $P(T < \infty) = 1$, men $E(T) = \infty$.

SLUTT