,

Eksamen STK 2130, 9. juni 2010

Kortfattet fasit, fra Nils Lid Hjort

Oppgave 1

(a) Poisson-prosess: se boken.

(b) At $T > t$ er det samme som at $X(t) = 0$, hvilket har sannsynlighet $\exp(-\lambda t)$. Dette gir den kumulative og dernest tettheten. Resultatet er velkjent fra pensum.

(c) At $T_{\min} > t$ er det samme som at både $T > t$ og $T' > t$. Ved uavhengigheten følger at sannsynligheten for dette blir $\exp(-\lambda t) \cdot \exp(-\lambda t) = \exp(-2\lambda t)$, så $T_{\min}$ er eksponensiell med parameter 2λ.

(d) At $T_{\max} \le t$ er det samme som at både $T \le t$ og $T' \le t$, som får sannsynlighet

$$G_2(t) = F(t)^2 = \{1 - \exp(-\lambda t)\}^2 = 1 - 2\exp(-\lambda t) + \exp(-2\lambda t).$$

Tettheten blir

$$g_2(t) = 2F(t)f(t) = 2\{1 - \exp(-\lambda t)\}\lambda \exp(-\lambda t).$$

Forventningen kan finnes via $\int_0^\infty t g_2(t)\,\mathrm{d}t$, men det er kjappere å bruke at $T + T' = T_{\min} + T_{\max}$, fra hvilket følger

$$\mathrm{E}(T + T') = \frac{2}{\lambda} = \mathrm{E}\,T_{\min} + \mathrm{E}\,T_{\max} = \frac{1}{2\lambda} + \mathrm{E}\,T_{\max},$$

så $T_{\max}$ må ha forventning $\frac{3}{2}/\lambda$.

(e) Hazardraten er $h(t) = g(t)/\{1 - G(t)\}$, når tetthet og kumulativ er g og G. For $T_{\min}$ får vi at den er konstant lik 2λ. For $T_{\max}$ finner vi

$$h(t) = \frac{g_2(t)}{1 - G_2(t)} = \frac{2F(t)f(t)}{1 - F(t)^2} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}\frac{2F(t)}{1 + F(t)} = \lambda\frac{2 - 2\exp(-\lambda t)}{2 - \exp(-\lambda t)}.$$

Kurven starter i null og stiger vent og vakkert mot λ. Å ha to liv er kjekt, men til slutt (når det ene er brukt opp) har man det omtrent som den som bare har ett liv. Det samme gjelder for dem som er så heldige at de starter ut med k liv – til slutt har de jo bare det lengstlevende av disse liv, med samme hazardrate som de fattiges liv.

(f) Fra rate-definisjonen eller fra Poisson-definisjonen ser man nokså greit at om $X_1, \ldots, X_m$ er uavhengige Poisson-prosesser med rater $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, så er den aggregerte $X_1 + \cdots + X_m$ en ny Poisson-prosess, med rate $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m$.

Oppgave 2

(a) Vi jobber med $A(t)$ gitt $X(t)$. Da er jo $A(t) = Y_1 + \cdots + Y_{X(t)}$, med et gitt antall i.i.d.-ledd, så

$$\mathrm{E}\{A(t) \,|\, X(t)\} = X(t)\xi \quad \text{og} \quad \mathrm{Var}\{A(t) \,|\, X(t)\} = X(t)\sigma^2.$$

Herav følger

$$\mathrm{E}\,A(t) = \xi\lambda t \quad \text{og} \quad \mathrm{Var}\,A(t) = \lambda t(\xi^2 + \sigma^2).$$

Vi har gjennomgått analogt punkt et par ganger nylig.

(b) Så var det $B(t)$. Gitt $X(t) = n$ er det altså n hendelsestidspunkter $S_1 < \cdots < S_n$, og $(S_1, \ldots, S_n)$ har samme fordeling som $(U_{(1)}, \ldots, U_{(n)})$, ordningen av et i.i.d. sample $U_1, \ldots, U_n$ fra den uniforme fordelingen over $[0, t]$. (Vi har snakket om og anvendt dette et par ganger i undervisningen i ukene før eksamen.) Altså

$$\mathrm{E}\{B(t) \,|\, X(t) = n\} = \mathrm{E} \sum_{i=1}^{n} U_{(i)} = \mathrm{E} \sum_{i=1}^{n} U_i = nt/2.$$

Fra $\mathrm{E}\{B(t) \,|\, X(t)\} = \frac{1}{2} t X(t)$ følger så

$$m(t) = \mathrm{E}\, B(t) = \tfrac{1}{2} \lambda t^2.$$

Vi kan alternativt arbeide med $D = B(t + h) - B(t)$, som er lik null med sjanse $1 - \lambda h + o(h)$ og lik $t + o(h)$ med sjanse $\lambda h + o(h)$, hvorav følger

$$m(t + h) - m(t) = \mathrm{E}\, D = \lambda t h + o(h)$$

og dermed $m'(t) = \lambda t$. Via initialbetingelsen $m(0) = 0$ finner vi igjen $m(t) = \frac{1}{2} \lambda t^2$.

(c) Vi finner analogt

$$\mathrm{Var}\{B(t) \,|\, X(t) = n\} = \mathrm{Var} \sum_{i=1}^{n} U_{(i)} = \mathrm{Var} \sum_{i=1}^{n} U_i = nt^2/12.$$

Setter vi sammen de to bitene av marginalvariansen får vi

$$\mathrm{Var}\, B(t) = \mathrm{E}\, X(t) t^2/12 + \mathrm{Var}\, \tfrac{1}{2} X(t) t = \lambda t^3 (1/12 + 1/4) = \lambda t^3/3.$$

Oppgave 3

(a) Tilstandene er rekurrente, og perioden er 1.

(b) Vi har

$$P^{(2)}_{0,0} = \sum_j P_{0,j} P_{j,0} = (1 - p)^2 + p(1 - p) = 1 - p.$$

Eventuelt kan man multiplisere sammen P og P og lese av hva $(0, 0)$-elementet er.

(c) Vi har

$$P(X_{88} = j \,|\, X_{87} = 0, X_{89} = 0) = \frac{P(X_{87} = 0) P_{0,j} P_{j,0}}{P(X_{87} = 0) P^{(2)}_{0,0}} = \frac{P_{0,j} P_{j,0}}{P^{(2)}_{0,0}},$$

og vi finner $1 - p$ for $j = 0$, p for $j = 1$, og 0 for $j = 2$. Svaret er uavhengig av hvordan kjeden starter, idet faktoren $P(X_{87} = 0)$ altså forkortes vekk.

(d) Ligningene er $\pi \mathbf{P} = \pi$, som her gir

$$\pi_0(1 - p) + \pi_1(1 - p) + \tfrac{1}{3}\pi_2 = \pi_0, \quad \pi_0 p + \tfrac{1}{3}\pi_2 = \pi_1, \quad \pi_1 p + \tfrac{1}{3}\pi_2 = \pi_2,$$

som etter mildt strev og i kooperasjon med $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$ gir de lovede løsninger.

(e) Her er $\mathrm{E}(T_0 \mid X_0 = 0) = 1/\pi_0$, pr. kjent resultat fra pensum.

(f) Vi har $u_2 = 0$. Videre er

$$\begin{aligned} u_0 &= (1-p)(1+u_0) + p(1+u_1) = 1 + (1-p)u_0 + pu_1, \\ u_1 &= (1-p)(1+u_0) + p(1+u_2) = 1 + (1-p)u_0. \end{aligned}$$

Dette gir

$$u_0 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} = \frac{1+p}{p^2} \quad \text{og} \quad u_1 = \frac{1}{p^2}.$$

Når p er liten kan det derfor ta uhorvelig lang tid å komme seg til 2.

Oppgave 4

(a) Generatoren blir

$$R = \begin{pmatrix} -3\lambda & 2\lambda & \lambda \\ \lambda & -2\lambda & \lambda \\ \lambda & 2\lambda & -3\lambda \end{pmatrix}.$$

(b) Grensen for $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)R$ når $t \to \infty$ gir oss $0 = (p_0, p_1, p_2)R$, altså

$$-3p_0 + p_1 + p_2 = 0, \quad 2p_0 - 2p_1 + 2p_2 = 0, \quad p_0 + p_1 - 3p_2 = 0.$$

Sammen med $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ gir dette ekvilibriumsfordelingen $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Resultatet er altså uavhengig av λ – denne parameteren styrer hvor raskt prosessen beveger seg mot sitt ekvilibrium, men ikke selve likevektsfordelingen.

(c) At $T > t$ betyr im Westen nichts Neues for hvert av de mange små tidsintervallene $[(j-1)t/m, jt/m]$. Altså er

$$P(T > t) = \prod_{j=1}^{m} \{1 - 3\lambda t/m + o(1/m)\},$$

og dette uttrykket, som holder for hver m, beveger seg mot $\exp(-3\lambda t)$.

(d) Lar vi A være den begivenhet at $T > t$ har vi jo nettopp funnet ut at $P(A \mid \lambda) = \exp(-3\lambda t)$. Marginalt gjelder derfor

$$\begin{aligned} P(A) &= \int_0^\infty P(A \mid \lambda) g(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda \\ &= \int_0^\infty \exp(-3\lambda t) \exp(-\lambda) \, \mathrm{d}\lambda \\ &= \int_0^\infty \exp\{-\lambda(3t+1)\} \, \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{1+3t}. \end{aligned}$$