UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	STK2130 — Modellering av stokastiske prosesser
Eksamensdag:	Fredag 10. juni 2011
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1. (10 poeng)

Betrakt en Markovkjede $X_n, n \geq 0$ med tilstandsrom $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og overgangsmatrise

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{20} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(i) Beskriv Markovkjeden ved hjelp av et diagram.

(ii) Finn alle kommuniserende klasser til Markovkjeden. Hvilke klasser er lukket ?

(iii) Beregn for alle $i, j = 1, ..., 5$ sannsynligheten at $X_2 = j$ gitt at $X_0 = i$.

(iv) Hvilke klasser er rekurrente og hvilke klasser er transiente ? Finn perioden til tilstanden $i = 1$.

Oppgave 2. (10 poeng)

Betrakt en aksjeprisprosess S_n med verdier

$$S_n = 0 \text{ \$ eller } 1 \text{ \$ eller } 2 \text{ \$}$$

for alle $n = 0, 1, 2, ...$(uttrykt i uker).

(Fortsettes på side 2.)

Anta at $(S_n)_{n\geq 0}$ er en Markovkjede med overgangsmatrise

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.48 & 0.32 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

(i) Finn for alle $i = 0, 1, 2$ sannsynligheten for at aksjeprisen noensinne blir 0 \$, gitt at den starter med i \$.

(ii) Beregn for alle $i = 0, 1, 2$ den forventede tiden (mean time) til aksjeprisen treffer 0 \$, gitt at $S_0 = i$ \$.

(iii) En aksjemegler, som observerer aksjeprisene $S_n, n = 0, 1, 2, ...$, skal kjøpe aksjen, hvis den koster 1 \$.
Hva er den forventede aksjeprisen tre uker etter kjøpet, dvs. hva er

$$E[S_{T+3} \,|T < \infty] \ \ ?$$

Her er $T = H^A$, dvs. stoppe-tiden (hitting time)

$$H^A = \inf\{n \geq 0 : S_n \in A\},$$

hvor $A = \{1\}$.

(iv) Hva er den forventede tiden etter den første uken til aksjeprisen blir enten 0 \$ eller 2 \$, gitt at $S_0 = 2$ \$, dvs. hva er

$$E\left[T^A \,|S_0 = 2\right] \ \ ?$$

Her er T^A definert som

$$T^A = \inf\{n \geq 1 : S_n \in A\},$$

hvor $A = \{0, 2\}$.

Oppgave 3.(Gjenoppfylling av et varehus) (10 poeng)

Betrakt et varehus med lagerkapasitet (capacity) c enheter av en vare. La D_n være etterspørselen etter varen i tidsperioden n. Dessuten skal X_n betegne restbestanden av varen (residual stock) på slutten av tidsperioden n. Manageren som forvalter varehuset skal gjenoppfylle varebestanden opp til lagerkapasiteten c (restock to capacity c) i begynnelsen av perioden $n + 1$, hvis

$$X_n \leq m,$$

der $m \in \{0, 1, ..., c - 1\}$ er en bestemt terskelverdi (threshold). Derfor er dynamikken til $X_n, n \geq 0$ gitt ved

$$X_{n+1} = \begin{cases} (c - D_{n+1})^+ & \text{hvis } X_n \leq m \\ (X_n - D_{n+1})^+ & \text{hvis } m < X_n \leq c \end{cases},$$

hvor $(a)^+ \overset{def}{=} \max(a, 0)$ for $a \in \mathbb{R}$.

(Fortsettes på side 3.)

Anta at $D_n, n \geq 1$ er uavhengige og identisk ($i.i.d$) fordelte stokastiske variabler med fellesfordeling D slik at

$$P(D \geq i) = 4^{-i},$$

dvs. $P(D = i) = 4^{-i} - 4^{-(i+1)}, i \geq 1$ ($D \in \{0, 1, 2, ...\}$). I tillegg er $c = 2$ (dvs. $m \in \{0, 1\}$).

Finn den optimale gjenoppfyllingsstrategien (restocking strategy) for varehusmanageren, dvs. minimer kostnadsfunksjonen

$$a\overline{g}(m) + b\overline{f}(m)$$

m.h.t. m, hvor $\overline{g}(m)$ er langtidsraten av gjenoppfylling (long-run frequency of restocking) og $\overline{f}(m)$ er langtidsraten av udekket etterspørsel (long-run proportion of unmet demand). Dessuten står $a \geq 0$ for kostnaden per enhet vareoppfylling og $b \geq 0$ for tap m.h.t. udekket etterspørsel (per enhet). Anta at $a = 2$ \$.

Hint: Se formelark.

Oppgave 4. (10 poeng)

Betrakt en Markovkjede $X_n, n \geq 0$ med tilstandsrom $I = \{0, 1, 2, ...\}$ og med overgangssannsynligheter gitt ved

$$p_{01} = 1,\ p_{i,i+1} + p_{i,i-1} = 1, p_{i,i+1} = \left(\frac{i+1}{i}\right)^2 p_{i,i-1}, i \geq 1.$$

Beregn sannsynligheten for at $X_n \geq 1$ for alle $n \geq 1$, gitt at $X_0 = 0$, dvs.

$$P(X_n \geq 1 \text{ for alle } n \geq 1 \,|X_0 = 0)\,.$$

Hint: Bruk substitusjon av formen $u_i = h_{i-1} - h_i$ og teleskopsummen. Se formelark.

Slutt

(Fortsettes på side 4.)

Vedlegg: Formelark

a) $h_i^A, i \in I$ (hitting probability) er den minste ikke-negative løsningen til

$$\begin{cases} h_i^A = 1 & \text{hvis } i \in A \\ h_i^A = \sum_{j \in I} p_{ij} h_j^A & \text{hvis } i \notin A \end{cases}.$$

b) $k_i^A, i \in I$ (mean hitting time) er den minste ikke-negative løsningen til

$$\begin{cases} k_i^A = 0 & \text{hvis } i \in A \\ k_i^A = 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} k_j^A & \text{hvis } i \notin A \end{cases}.$$

c) (i)

$$\overline{f}(m) \stackrel{def}{=} \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(X_j) = \sum_{i=0}^{c} \pi_i f(i),$$

hvor $\pi = (\pi_0, ..., \pi_c)$ er den invariante fordelingen og

$$f(i) \stackrel{def}{=} E\left[\widetilde{X}_{n+1} \,|X_n = i\right] \;=\; \begin{cases} E\left[(D-c)^+\right] & \text{hvis } i \le m \\ E\left[(D-i)^+\right] & \text{hvis } m < i \le c \end{cases}$$

(expected unmet demand)

(ii) $Y \in \{0, 1, 2, ...\}$ sannsynlighetsvariabel $\Longrightarrow$

$$E[Y] = \sum_{k \ge 1} P(Y \ge k).$$

(iii)

$$\sum_{k \ge 0} q^k = \frac{1}{1-q}, \; 0 \le q < 1$$

(iv)

$$\overline{g}(m) \stackrel{def}{=} \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g(X_j) = \sum_{i=0}^{c} \pi_i g(i),$$

hvor $\pi = (\pi_0, ..., \pi_c)$ er den invariante fordelingen og

$$g(i) \stackrel{def}{=} \begin{cases} 1 & \text{hvis } 0 \le i \le m \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}.$$

(v)

$$p_{ij} = \begin{cases} P((c-D)^+ = j) & \text{hvis } 0 \le i \le m \\ P((i-D)^+ = j) & \text{hvis } m < i \le c \end{cases}.$$

d) (i)

$$\sum_{n \ge 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(ii) Teleskopsum:

$$\sum_{i=1}^{m} (h_{i-1} - h_i) = h_0 - h_m.$$