UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK2130 — Modellering av stokastiske prosesser.
Eksamensdag:	Onsdag 12. juni 2013.
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator. Formelsamling for STK1100 and STK1110

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Matrisen av et-stegs overgangssannsynligheter for en Markov kjede $X_0, X_1, X_2, \ldots$ på tilstandene $\{0, 1, 2, 3\}$ er gitt ved

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{vmatrix}$$

a) Bestem klassene til Markovkjeden. Avgjør hvilke klasser som er transiente og hvilke som er rekurrente.

b) La $P_{ij}^n = \mathrm{P}(X_n = j | X_0 = i)$. Anta at kjeden starter i tilstand $i = 1$ eller tilstand $i = 2$. Finn $\lim P_{ij}^n$ når $n \to \infty$.

Hva er grensene til P_{ij}^n for $i = 0$ og $i = 3$ når $n \to \infty$?

c) Hva er grensen for gjennomsnittet av X_n'ene, altså for $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, når $n \to \infty$?

Begrunn svaret.

(Merk at denne grensen ikke avhenger av den initielle tilstanden X_0.)

(Fortsettes på side 2.)

d) La T være tiden inntil kjeden når en rekurrent tilstand.

Finn forventet verdi ν_j for T gitt at Markovkjeden starter i en transient tilstand j.

e) La A_j være antall besøk i tilstand j inkludert X_0 for $j = 0$ og $j = 3$.

Forklar hvorfor $E[A_0 \mid X_0 = 0] = \frac{3}{2}$ og $E[A_3 \mid X_0 = 3] = \frac{4}{3}$.

Beregn også $E[A_0 \mid X_0 = 3]$.

Oppgave 2

La $X(t)$ være en kontinuerlig tid Markovkjede med homogene overgangssannsynligheter $\mathrm{P}_{ij}(t) = \mathrm{P}(X(t) = j|X(0) = i) = \mathrm{P}(X(t+s) = j|X(s) = i)$. Tilstandsrommet er begrenset til tilstandene $\{0, 1, 2\}$.

a) Utled Chapman-Kolmogorov ligningene

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{2} P_{ik}(t)P_{kj}(s)$$

(når det bare er 3 tilstander).

Med matrisenotasjon

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} P_{00}(t) & P_{01}(t) & P_{02}(t) \\ P_{10}(t) & P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{20}(t) & P_{21}(t) & P_{22}(t) \end{bmatrix}$$

kan Chapman-Kolmogorov ligningene skrives $\mathbf{P}(t+s) = \mathbf{P}(t)\mathbf{P}(s)$. (Du skal ikke vise dette).

Matrisen of deriverte er gitt ved

$$\mathbf{P}'(t) = \begin{bmatrix} P'_{00}(t) & P'_{01}(t) & P'_{02}(t) \\ P'_{10}(t) & P'_{11}(t) & P'_{12}(t) \\ P'_{20}(t) & P'_{21}(t) & P'_{22}(t) \end{bmatrix}$$

og fra denne definerer vi den infinitesimale generatormatrisen ved $\mathbf{R} = \mathbf{P}'(0)$.

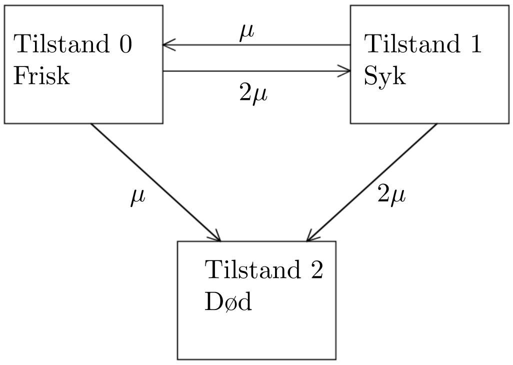
b) Utled forover Kolmogorovligningene som på matriseform kan skrives

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{R}.$$

(Hint: Husk $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$, dvs. identitetsmatrisen).

(Fortsettes på side 3.)

I resten av denne oppgaven betraktes en Markovkjede $X(t)$ på et "frisk-syk-død med mulighet for å tilfriskne" skjema der tilstand "frisk" er definert som tilstand 0, tilstand "syk" som tilstand 1 og "død" som tilstand 2 med overgangsrater $q_{02} = q_{10} = \mu$ og $q_{01} = q_{12} = 2\mu$. Her er q_{ij} overgangsratene fra tilstand i til tilstand j. Det er altså mulig å bli frisk etter sykdom, men det er ingen overganger ut fra tilstand 2, og således er $q_{20} = q_{21} = 0$. Skjemaet er beskrevet i Figur 1.



Figur 1

c) Finn den infinitesimale generatoren **R** for systemet.

For dette systemet kan overgangssannsynlighetene $P_{00}(t), P_{01}(t), P_{10}(t)$ and $P_{11}(t)$ skrives

$$
\begin{aligned}
P_{00}(t) &= \tfrac{1}{2}[\exp(-(3-\sqrt{2})\mu t) + \exp(-(3+\sqrt{2})\mu t)] \\
P_{01}(t) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}[\exp(-(3-\sqrt{2})\mu t) - \exp(-(3+\sqrt{2})\mu t)] \\
P_{10}(t) &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}[\exp(-(3-\sqrt{2})\mu t) - \exp(-(3+\sqrt{2})\mu t)] \\
P_{11}(t) &= \tfrac{1}{2}[\exp(-(3-\sqrt{2})\mu t) + \exp(-(3+\sqrt{2})\mu t)].
\end{aligned}
$$

Du er ikke spurt om å utlede disse utrykkene. Istedet skal du finne uttrykk for de øvrige $P_{ij}(t)$.

d) Finn den deriverte av $P_{00}(t)$ fra formelen gitt over.

Finn videre forover Kolmogorovligningen for komponenten $P'_{00}(t)$ i $\mathbf{P}'(t)$.

Vis at disse to utrykkene er like.

e) La B være total tid som et individ tilbringer i tilstanden syk. Beregn $\mathrm{E}[B|X(0) = 0]$.

Finn også forventet total levetid for et individ gitt at $X(0) = 0$.

SLUTT