UNIVERSITETET I OSLO

Matematisk Institutt

EKSAMEN I:	**STK 2130: Modellering av stokastiske prosesser**
TID FOR EKSAMEN:	**Onsdag 9. juni 2010, 9:00–12:00**
HJELPEMIDLER:	**Kalkulator, «Formelsamling til STK1100 og STK1110»**

Oppgavesettet er på fire sider og består av fire oppgaver.

Oppgave 1

VENTETIDEN ER OVER, og denne oppgaven omhandler ventetider og Poisson-prosesser.

(a) La $X = \{X(t) \colon t \geq 0\}$ være en Poisson-prosess med parameter λ. Forklar kort hva dette innebærer.

(b) La T være tidspunktet for den første hendelse for X-prosessen. Vis at T har sannsynlighetstetthet

$$f(t) = \lambda\, e^{-\lambda t} \quad \text{for } t \geq 0.$$

Denne fordelingen har forventning $1/\lambda$ og varians $1/\lambda^2$ (hvilket du ikke er bedt om å vise ved denne anledning).

(c) Anta nå at $Y = \{Y(t) \colon t \geq 0\}$ er nok en Poisson-prosess, uavhengig av den første, og med den samme rateparameter λ. I tillegg til T, tidspunktet for første hendelse i X-prosessen, se på T', tidspunktet for første hendelse i Y-prosessen. Vis at $T_{\min}$, tidspunktet for den første av de to hendelser, altså $T_{\min} = \min(T, T')$, også er eksponensialfordelt, og sett opp dens forventning.

(d) Vi skal også se på $T_{\max}$, tidspunktet for den andre av de to hendelser, altså $T_{\max} = \max(T, T')$. Finn dennes sannsynlighetsfordeling og forventning.

(e) Hver sannsynlighetsfordeling på $[0, \infty)$ har en såkalt hazardrate; definer denne. Finn så eksplisitte formler for hazardratene til variablene $T_{\min}$ og $T_{\max}$.

(f) Vis at prosessen $Z = X + Y$, altså definert ved $Z(t) = X(t) + Y(t)$ for $t \geq 0$, danner en ny Poisson-prosess. Generaliser dette resultatet.

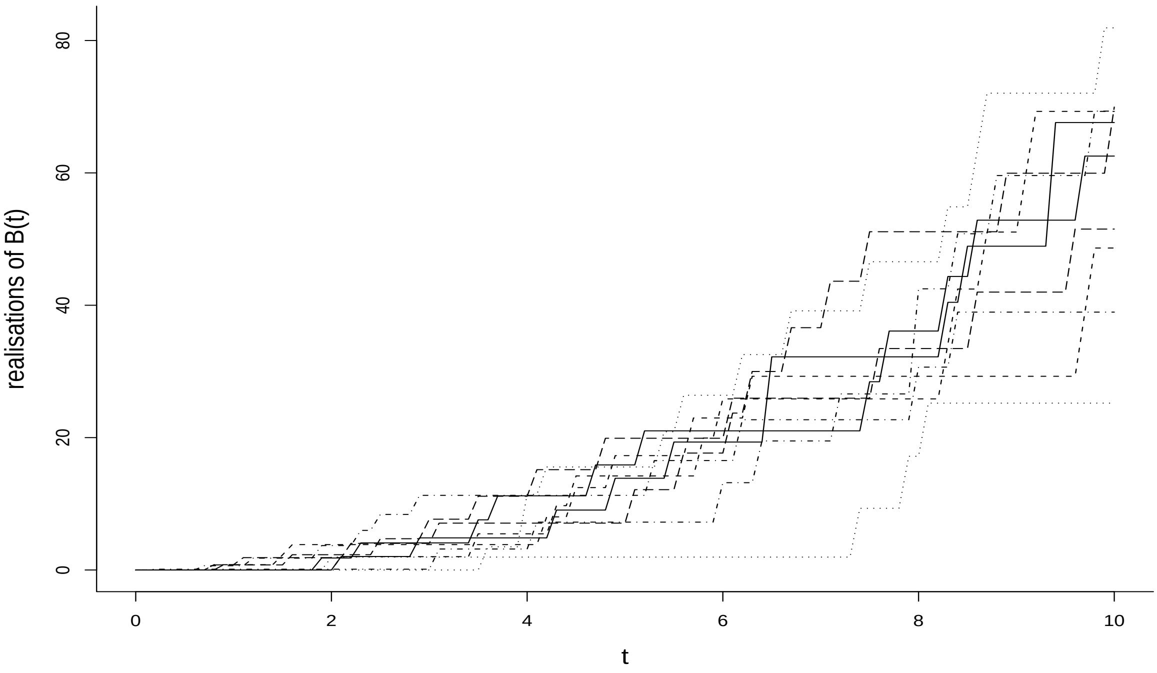
Oppgave 2

NOEN PROBLEMER ER MER SAMMENSATTE enn andre, og her skal vi se på et par varianter av de såkalte sammensatte Poisson-prosesser.

(a) La som i foregående oppgave $X = \{X(t) \colon t \geq 0\}$ være en Poisson-prosess med parameter λ, og se på prosessen

$$A(t) = \sum_{i=1}^{X(t)} Y_i \quad \text{for } t \geq 0.$$

Her er $Y_1, Y_2, \ldots$ en sekvens av uavhengige variable med samme fordeling, med en viss forventning ξ og standardavvik σ; Y_i-ene er dessuten uavhengige av X-prosessen. Summen har altså $X(t)$ ledd, på tid t; dersom $X(t) = 0$ er det ingen ledd i summen, som derfor, i et slikt tilfelle, defineres til null. Finn forventning og varians til $A(t)$.



Figur: Ti simulerte realisasjoner av prosessen $B(t)$ fra oppgave 2.

(b) Så skal vi se på en annen type sammensatt prosess, nemlig

$$B(t) = \sum_{i=1}^{X(t)} S_i = S_1 + \cdots + S_{X(t)} \quad \text{for } t \geq 0,$$

der $S_1 < S_2 < S_3 < \cdots$ er tidspunktene for de hendelser som opptrer i X-prosessen. Finn forventningen til $B(t)$.

(c) Om du får tid, finn også variansen til $B(t)$.

Oppgave 3

En prosess $X_0, X_1, X_2, \ldots$ befinner seg til enhver tid i en av tilstandene 0, 1, 2, og vi skal anta at den danner en Markov-kjede med matrise av overgangssannsynligheter

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

der p er en parameter i $(0,1)$.

(a) Gjør rede for om tilstandene er rekurrente eller transiente. Hva er Markov-kjedens periode?

(b) Beregn sannsynligheten $P^{(2)}_{0,0}$ for at $X_2 = 0$, gitt at $X_0 = 0$.

(c) Finn sannsynlighetene

$$P(X_{88} = j \mid X_{87} = 0, X_{89} = 0) \quad \text{for } j = 0, 1, 2.$$

(d) Sett opp ligninger til bestemmelse av (π_0, π_1, π_2), Markov-kjedens ekvilibriumsfordeling. – Disse ligningene er ikke vanskelig å løse, men det trenger du ikke gjøre innenfor eksamenstiden; løsningen er

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2) = \Big(\frac{2-p}{2+p+3p^2}, \frac{2p}{2+p+3p^2}, \frac{3p^2}{2+p+3p^2}\Big).$$

(e) Anta kjeden starter i $X_0 = 0$, og la T_0 være den tid som går før kjeden igjen befinner seg i 0. Hva er forventningen til T_0?

(f) La W være tidspunktet der kjeden første gang er i tilstand 2, altså $\min\{n \geq 0 \colon X_n = 2\}$, og definer

$$u_i = \mathrm{E}(W \mid X_0 = i) \quad \text{for } i = 0, 1, 2.$$

Hva er u_2? Sett opp ligninger til bestemmelse av u_0 og u_1, og løs disse ligningene, om du får tid.

Oppgave 4

En tidskontinuerlig Markov-prosess $X = \{X(t) \colon t \geq 0\}$ beveger seg mellom tilstandende 0, 1, 2 med infinitesimale rater

$$\begin{aligned}
P_{0,1}(h) &= 2\lambda h + o(h), \quad & P_{0,2}(h) &= \lambda h + o(h),\\
P_{1,0}(h) &= \lambda h + o(h), \quad & P_{1,2}(h) &= \lambda h + o(h),\\
P_{2,0}(h) &= \lambda h + o(h), \quad & P_{2,1}(h) &= 2\lambda h + o(h).
\end{aligned}$$

Her er som vanlig $P_{i,j}(t) = P(X(t) = j \mid X(0) = i)$, for $i, j = 0, 1, 2$.

(a) Sett opp prosessens infinitesimale generator, altså matrisen $R = P'(0)$ bestående av elementene $P'_{i,j}(0)$.

(b) La (p_0, p_1, p_2) være prosessens ekvilibriumsfordeling, altså

$$p_j = \lim_{t \to \infty} P_{i,j}(t) \quad \text{for } j = 0, 1, 2.$$

Sett opp ligninger for bestemmelse av disse, og løs ligningene.

(c) Anta prosessen starter i tilstand 0, og la T være den tid som går før prosessen forlater denne tilstanden, altså

$$T = \min\{t > 0 \colon X(t) = 1 \text{ eller } X(t) = 2\}.$$

Vis at $P(T \leq t) = 1 - e^{-3\lambda t}$ for $t \geq 0$.

(d) Vi skal nå anta at X-prosessen studert over stammer fra en populasjon av lignende prosesser, der de individuelle prosesser har forskjellige verdier for parameteren λ. Vi antar spesifikt at λ-ene i denne populasjonen har en eksponensiell fordeling med forventning 1. Hva er nå sannsynligheten for at en prosess som starter i tilstand 0 fortsatt ikke skal ha forlatt denne i løpet av tidsintervallet $[0, t]$?