UNIVERSITETET I OSLO.

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet.

Eksamen i:	ST 105 - Innføring i pålitelighetsanalyse
Eksamensdag:	3. desember 1990
Tid til eksamen:	0900 - 1500
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: "Matematische Formelsammlung"
	Elektronisk lommeregner.

Oppgavesettet er på 4 sider.

Kontrollér at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

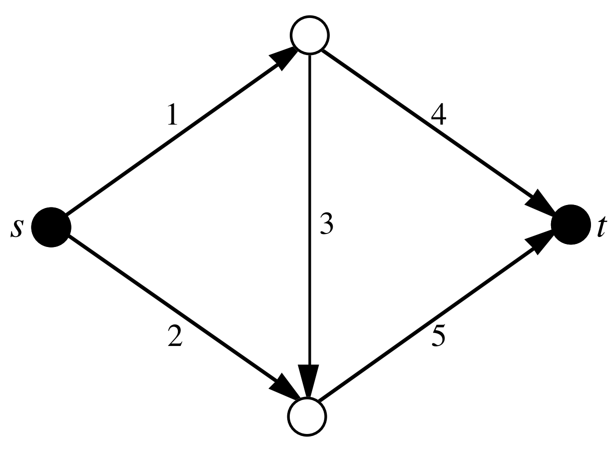
(a) Definér hva det vil si at stokastiske variable $T_1,\ldots,T_n$ er *assosierte*? Gi en kort intuitiv begrunnelse for definisjonen.

(b) La $X_1,\ldots,X_n$ være binære assosierte stokastiske variable. Vis at da er:

(1) $E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) \geq \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$

(2) $(1-X_1),\ldots,(1-X_n)$ assosierte stokastiske variable.

Betrakt det rettede nettverkssystem vist på Figur 1, under.



Figur 1.

Oppgaven fortsetter på neste side

Systemet sies å funksjonere dersom kildenoden s kan sende signaler til terminalnoden t gjennom nettverket. Signalene kan kun sendes i retninger svarende til pilretningene på de enkelte grenene i nettverket. Komponentene i systemet er merket med nummer fra 1 til 5.

(c) Finn systemets minimale sti- og kuttmengder.

Innfør så:

(3) $X_i = 1$ dersom i-te komponent funksjonerer, og 0 ellers, $i = 1,\ldots,5$,

(4) $p_i = \Pr(X_i = 1), i = 1,\ldots,5$,

(5) $\phi = 1$ dersom systemet funksjonerer, og 0 ellers,

(6) $h = \Pr(\phi = 1)$.

(d) Vis at ϕ kan skrives som:

(7) $\phi = \phi(\mathbf{X}) = X_1 X_4 [1 - (X_2 + X_3 - X_2 X_3) X_5] + X_1 (1 - X_2) X_3 X_5 + X_2 X_5$

der $\mathbf{X} = (X_1,\ldots,X_5)$.

(e) Vis at komponent 1 har større strukturell betydning enn komponent 4.

(f) Anta at X_1 og X_4 er assosierte innbyrdes, men uavhengig av de andre X_i-ene. Anta videre at X_2, X_3 og X_5 er uavhengige. Vis at da er:

(8) $h \geq p_1 p_4 [1 - (p_2 + p_3 - p_2 p_3) p_5] + p_1 (1 - p_2) p_3 p_5 + p_2 p_5$

Kommentér dette resultatet.

(g) Anta isteden at X_1 og X_2 er assosierte innbyrdes, men uavhengig av de andre X_i-ene. Anta videre at X_3, X_4 og X_5 er uavhengige. Vis at da er h mindre enn eller lik uttrykket på høyresiden av ulikhet (8). Kommentér også dette resultatet.

Oppgave 2

(a) Definér begrepet *monotont system*. Forklar også hva det vil si at en komponent i et monotont system er *relevant*.

(b) La (C, ϕ) være et monotont system, der komponentmengden $C = \{1,\ldots,n\}$, og la som vanlig $X_i = 1$ dersom i-te komponent funksjonerer, og 0 ellers, $i = 1,\ldots,n$, og $\mathbf{X} = (X_1,\ldots,X_n)$.

Innfør videre:

(9) $\Delta_i \phi(\mathbf{X}) = \phi(1_i, \mathbf{X}) - \phi(0_i, \mathbf{X}), \quad i = 1,\ldots,n$

Oppgaven fortsetter på neste side

(10) $\Delta_{i,\,j}\,\phi(\mathbf{X}) = \phi(1_i, 1_j, \mathbf{X}) - \phi(0_i, 1_j, \mathbf{X}) - \phi(1_i, 0_j, \mathbf{X}) + \phi(0_i, 0_j, \mathbf{X})$, $i, j = 1,\dots,n$, $i \neq j$.

Vis at for alle, $i, j \in C$, $i \neq j$:

(11) $\phi(\mathbf{X}) = X_i X_j\ \Delta_{i,\,j}\,\phi(\mathbf{X}) + X_i\,\Delta_i\,\phi(0_j, \mathbf{X}) + X_j\,\Delta_j\,\phi(0_i, \mathbf{X}) + \phi(0_i, 0_j, \mathbf{X})$

(c) La igjen $p_i = \Pr(X_i = 1)$, $i = 1,\dots,n$ og $h = \Pr(\phi = 1)$. La videre $e, f \in C$, $e \neq f$. Anta at X_e og X_f er assosierte innbyrdes, men uavhengig av de andre X_i-ene. Anta videre at:

(12) $\Delta_{e,\,f}\,\phi(\mathbf{X}) \geq 0$ for alle $(\cdot_e, \cdot_f, \mathbf{X})$

Vis at da er:

(13) $h \geq p_e\,p_f\ E[\Delta_{e,\,f}\,\phi(\mathbf{X})] + p_e\,E[\Delta_e\,\phi(0_f, \mathbf{X})] + p_f\,E[\Delta_f\,\phi(0_e, \mathbf{X})] + E[\phi(0_e, 0_f, \mathbf{X})]$

Forklar også kort at dersom isteden $\Delta_{e,\,f}\,\phi(\mathbf{X}) \leq 0$ for alle $(\cdot_e, \cdot_f, \mathbf{X})$ så snus også ulikheten (13).

(d) Vis at (12) holder hvis og bare hvis det ikke eksisterer noen minimal kuttmengde som inneholder både e og f. Vis også at $\Delta_{e,\,f}\,\phi(\mathbf{X}) \leq 0$ for alle $(\cdot_e, \cdot_f, \mathbf{X})$ hvis og bare hvis det ikke eksisterer noen minimal stimengde som inneholder både e og f. Kommentér resultatene fra oppgave 1 (f) og (g) i lys av dette.

Oppgave 3.

Vi skal i denne oppgaven betrakte et system for utvinning av gass. Systemet består av 5 fjernstyrte brønner plassert på havbunnen på feltet "Luftslottet". På grunn av at det store deler av året er svært vanskelige værforhold ved Luftslottet, kan systemet kun vedlikeholdes om sommeren. Man er derfor interessert i å anslå sannsynligheten for at alle 5 brønner er i funksjon i en periode på ett år. La derfor p betegne grensefrekvensen av brønner som ikke bryter sammen i løpet av en periode på ett år. Vi antar at alle brønner er i funksjon ved begynnelsen av en slik periode. Innfør så:

(14) $X_i = 1$ dersom i-te brønn er i funksjon etter en periode på ett år, og 0 ellers.
$i=1,\dots,5$.

Anta at $X_1,\dots,X_5$ er uavhengige identisk fordelte *gitt* p. Anta spesielt at:

(15) $\Pr(X_i = 1 \mid p) = p$

Grensefrekvensen p er imidlertid en størrelse man er usikker på. Man beskriver denne usikkerheten ved en sannsynlighetsfordeling med tetthet $\pi(p)$ gitt ved:

(16) $\pi(p) = \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\, p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}$, for $0 \leq p \leq 1$, og 0 ellers.

der α og β er positive konstanter.

Oppgaven fortsetter på neste side

(a) Vis at vi har:

$$(17)\ \Pr(X_i = 1) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

(b) Beregn sannsynligheten for at minst 4 brønner er i funksjon etter en periode på ett år.

(c) For å skaffe mer informasjon om brønnenes pålitelighet, samler man inn data om n tilsvarende brønner som alle er testet i en periode på ett år. Innfør:

(18) $Y_j = 1$ dersom i-te testbrønn er i funksjon etter en periode på ett år, og 0 ellers. $j=1,\ldots n$.

Gitt p antas $Y_1,\ldots,Y_n$ å være uavhengige identisk fordelte med samme fordeling som X_i-ene. Vis at den betingede tetthet for p gitt $\mathbf{Y} = (Y_1,\ldots,Y_n)$, betegnet med $\pi(p|\mathbf{Y})$ er gitt ved:

$$(19)\ \pi(p|\mathbf{Y}) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma(\alpha+S)\Gamma(\beta+n-S)} p^{\alpha+S-1}(1-p)^{\beta+n-S-1}, \quad \text{for } 0 \le p \le 1, \text{ og 0 ellers.}$$

der $S = Y_1 + \cdots + Y_n$. Gjør også kort rede for og kommentér at:

$$(20)\ \Pr(X_i = 1|\mathbf{Y}) = \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+n}\right)\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) + \left(1 - \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+n}\right)\left(\frac{S}{n}\right)$$

(d) Anta at man kun har én testbrønn til rådighet (isteden for n som i punktet over). Brønnen settes så i drift. Hver sommer blir det utført grundig forebyggende vedlikehold. Etter et slikt vedlikehold ansees brønnen å være like god som ny. Man antar derfor at for gitt p så er sannsynligheten for at brønnen ikke feiler i løpet av et vilkårlig år lik p. Det antas også at hvorvidt brønnen feiler ett år, er uavhengig av hva som har skjedd alle andre år. La Z være antall år på rad som brønnen *ikke* feiler. Vis at den betingede tettheten for p gitt Z, $\pi(p|Z)$ er gitt ved:

$$(21)\ \pi(p|Z) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+Z+1)}{\Gamma(\alpha+Z)\Gamma(\beta+1)} p^{\alpha+Z-1}(1-p)^{\beta}, \quad \text{for } 0 \le p \le 1, \text{ og 0 ellers.}$$

SLUTT