UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	ST 105 - Innføring i pålitelighetsanalyse
Eksamensdag:	8. desember 1992
Tid til eksamen:	0900 - 1500
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: "Matematische Formelsammlung"
	Elektronisk lommeregner.

Oppgavesettet er på 6 sider.

Kontrollér at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Vi skal i denne oppgaven se på hvordan vi kan estimere påliteligheten til et system ved hjelp av såkalt Monte Carlo simulering. La (C, ϕ) betegne det binære monotone systemet vi er interessert i, der $C = \{1,\ldots, n\}$ som vanlig er systemets komponentmengde og ϕ er strukturfunksjonen. Innfør videre:

(1) $X_i = 1$ hvis i-te komponent virker og 0 ellers, $i = 1,\ldots, n$.

(2) $p_i = \Pr(X_i = 1) =$ Påliteligheten til i-te komponent, $i = 1,\ldots, n$.

(3) $h = \Pr(\phi = 1) =$ Påliteligheten til systemet.

La også $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots, X_n)$ og $\boldsymbol{p} = (p_1,\ldots, p_n)$. Vi antar at $X_1,\ldots, X_n$ er stokastisk uavhengige, og kan dermed skrive:

(4) $h = h(\boldsymbol{p})$

Vektoren $\boldsymbol{p}$ antas å være kjent. På grunn av systemets kompleksitet, er det imidlertid ikke uten videre lett å beregne den eksakte verdien av h. Vi antar dog at vi for enhver gitt $\boldsymbol{X}$ kan beregne $\phi(\boldsymbol{X})$ effektivt. På en datamaskin genererer vi “kunstig” N uavhengige stokastiske vektorer $\boldsymbol{X}_1,\ldots, \boldsymbol{X}_N$ som alle har samme fordeling som $\boldsymbol{X}$. Vi kan da estimere h med:

(5) $$\hat{h} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \phi(\boldsymbol{X}_i)$$

(a) Vis at estimatorens forventning og varians er gitt ved:

Oppgaven fortsetter på neste side

(6) $$\mathrm{E}\left(\hat{h}\right) = h, \quad \mathrm{Var}\left(\hat{h}\right) = \frac{h(1-h)}{N}$$

(b) La ε>0 være gitt. Hvor stor må N være (uttrykt ved ε) for at:

(7) $$\mathrm{Var}\left(\hat{h}\right) \leq \varepsilon, \quad \forall h \in \langle 0,1 \rangle$$

Vi innfører så følgende notasjon:

(8) $$\phi_{k,n}(\boldsymbol{X}) = I\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq k\right), \quad \text{der } 1 \leq k \leq n$$

(c) Forklar kort hvorfor $\phi_{k,n}$ er strukturfunksjon for en k-av-n-struktur.

(d) Vis at vi har:

(9) $$\phi_{n-c+1,n}(\boldsymbol{X}) \;\leq\; \phi(\boldsymbol{X}) \;\leq\; \phi_{d,n}(\boldsymbol{X}), \quad \forall \boldsymbol{X} \in \{0,1\}^n$$

der:

(10) $c = \min\{|K| \,:\, K \text{ kuttmengde for } \phi\}$

(11) $d = \min\{|P| \,:\, P \text{ stimengde for } \phi\}$

c er med andre ord antall komponenter i den kuttmengde som har færrest komponenter, mens d er antall komponenter i den stimengde som har færrest komponenter. Begge disse størrelsene kan som oftest finnes effektivt uten å måtte liste opp samtlige minimale stier og kutt for systemet. Vi betrakter i vår sammenheng c og d som kjente tall.

(e) Vis at vi alltid har:

(12) $(d+c) \leq (n+1)$

og at likhet i (12) holder hvis og bare hvis (C, ϕ) er en k-av-n-struktur (for en eller annen k).

Vi antar i resten av oppgaven at $(d+c) < (n+1)$. La så S være gitt ved:

(13) $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ = Antall funksjonerende komponenter

Vi antar at vi allerede har beregnet sannsynlighetsfordelingen til S, og at denne er gitt ved:

(14) $\Pr(S = s) = q_s, \quad s = 0, 1, \ldots, n.$

Oppgaven fortsetter på neste side

[Dette kan i praksis gjøres meget effektivt ved å benytte en bestemt algoritme med beregningstid proporsjonal med n^2. Vi skal imidlertid ikke se nærmere på dette i denne sammenheng, og betrakter derfor $q_0, q_1, \ldots, q_n$ som kjente tall.]

(f) Vis at:

$$(15)\quad \sum_{j=n-c+1}^{n} q_j \;\le\; h \;\le\; \sum_{j=d}^{n} q_j$$

Vi introduserer så følgende notasjon:

$$(16)\ h_{a,b} = \mathrm{E}\left(\phi \mid a \le S \le b\right), \quad \text{for alle } 0 \le a \le b \le n.$$

(g) Vis at h kan uttrykkes som:

$$(17)\ h = \sum_{j=n-c+1}^{n} q_j + h_{d,n-c} \sum_{j=d}^{n-c} q_j$$

På en datamaskin genererer vi igjen kunstig N uavhengige stokastiske vektorer $\boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_N$ som alle har samme fordeling som den betingede fordelingen for $\boldsymbol{X}$ gitt begivenheten $\{d \le S \le n\text{-}c\}$. Vi kan da estimere $h_{d,n\text{-}c}$ med:

$$(18)\ \tilde{h}_{d,n-c} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \phi\left(\boldsymbol{Y}_i\right)$$

Ved innsetning i (17) får vi så en ny estimator for h gitt ved:

$$(19)\ \tilde{h} = \sum_{j=n-c+1}^{n} q_j + \tilde{h}_{d,n-c} \sum_{j=d}^{n-c} q_j$$

(h) Vis den nye estimatorens forventning og varians er:

$$(20)\ \mathrm{E}\left(\tilde{h}\right) = h\,, \ \text{og} \ \ \mathrm{Var}\left(\tilde{h}\right) = \frac{h_{d,n-c}\left(1 - h_{d,n-c}\right)}{N} \left(\sum_{j=d}^{n-c} q_j \right)^2$$

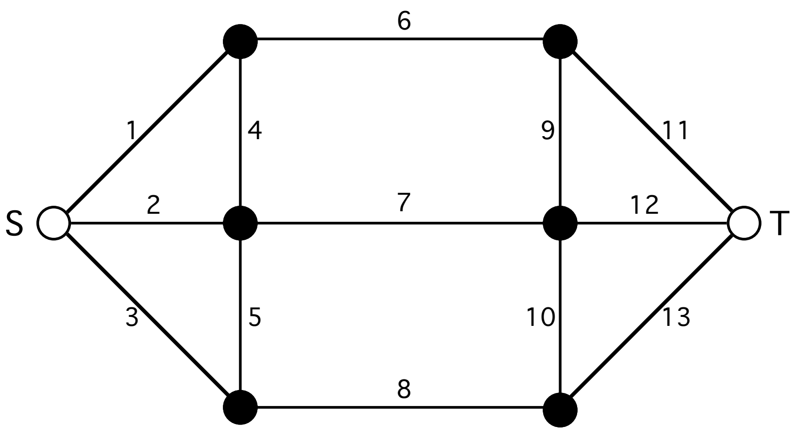
(i) La igjen $\varepsilon > 0$ være gitt. Hvor stor må nå N være (uttrykt ved ε og $q_d, \ldots, q_{n\text{-}c}$) for at:

$$(21)\ \mathrm{Var}\left(\tilde{h}\right) \le \varepsilon, \quad \forall h_{d,n-c} \in \langle 0, 1 \rangle$$

Sammenlign dette resultatet med det tilsvarende under punkt (b), og gi en kort kommentar.

Oppgaven fortsetter på neste side

I de siste punktene av denne oppgaven skal vi se på en konkret anvendelse av resultatene over. Vi betrakter derfor et 2 terminals urettet nettverkssystem illustrert på Figur 1. Systemet består av 13 komponenter svarende til kantene i nettverket, nummerert fra 1 til 13. Nettverket funksjonerer dersom de to terminalnodene, S og T kan kommunisere via nettverket.



Figur 1. Et 2-terminals urettet nettverk.

For enkelthets skyld antar vi at alle komponentene i systemet har samme pålitelighet, p.

(j) Forklar kort hvorfor vi som følge av denne antagelsen får at:

$$(22)\ \Pr(S = s) = \binom{13}{s} p^s (1-p)^{13-s}, \quad s = 0, 1, \ldots, 13.$$

Anta spesielt at $p = 0.85$. De resulterende verdiene for $\Pr(S=s)$ er gitt i Tabell 1 nedenfor:

s	$\Pr(S = s)$
0	1.95E-11
1	1.43E-09
2	4.88E-08
3	1.01E-06
4	1.44E-05
5	0.0001
6	0.0011
7	0.0063
8	0.0266
9	0.0838
10	0.1900
11	0.2937
12	0.2773
13	0.1209

Tabell 1. Sannsynlighetsfordelingen for S dersom $p = 0.85$

(k) Hvor stor må N være for at $\mathrm{Var}(\hat{h}) \le 0.001$ (uansett hva h måtte være), og hvor stor må N være

Oppgaven fortsetter på neste side

for at $\mathrm{Var}(\tilde{h}) \leq 0.001$ (uansett hva $h_{d,n\text{-}c}$ måtte være)? Kommentér resultatet.

(l) Under har vi listet opp to datasett, $\boldsymbol{X}_1,\ldots,\boldsymbol{X}_{10}$ (uavhengige vektorer generert fra fordelingen for $\boldsymbol{X}$) og $\boldsymbol{Y}_1,\ldots,\boldsymbol{Y}_{10}$ (uavhengige vektorer generert fra den betingede fordelingen for $\boldsymbol{X}$ gitt begivenheten $\{d \leq S \leq n\text{-}c\}$). Beregn med utgangspunkt i disse to datasettene henholdsvis $\hat{h}$ og $\tilde{h}$. [Svar: $\hat{h} = 0.9$ og $\tilde{h} = 0.969$]

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{X}_1 &= (1,1,1,1,1,1,0,1,1,1,1,1)\\
\boldsymbol{X}_2 &= (0,1,1,1,0,1,1,1,1,1,1,0)\\
\boldsymbol{X}_3 &= (1,1,0,0,1,1,1,1,1,1,0,1)\\
\boldsymbol{X}_4 &= (1,1,1,1,1,0,1,1,1,1,1,1)\\
\boldsymbol{X}_5 &= (0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)\\
\boldsymbol{X}_6 &= (1,1,1,1,1,1,1,0,0,1,1,1)\\
\boldsymbol{X}_7 &= (0,1,1,1,1,1,1,0,1,0,1,1)\\
\boldsymbol{X}_8 &= (1,0,1,1,1,0,1,1,1,1,1,1)\\
\boldsymbol{X}_9 &= (1,1,1,1,0,1,1,1,0,1,1,1)\\
\boldsymbol{X}_{10} &= (1,0,1,1,1,0,0,1,1,1,0,0,0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Y}_1 &= (0,1,1,1,0,1,1,1,1,0,1,1,1)\\
\boldsymbol{Y}_2 &= (0,1,0,1,1,1,0,1,1,0,1,1,1)\\
\boldsymbol{Y}_3 &= (1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1)\\
\boldsymbol{Y}_4 &= (1,1,0,1,1,1,0,0,1,1,1,0,1)\\
\boldsymbol{Y}_5 &= (0,1,0,0,1,1,1,1,1,1,0,1,1)\\
\boldsymbol{Y}_6 &= (1,0,1,1,0,1,0,1,0,1,1,1,1)\\
\boldsymbol{Y}_7 &= (1,1,1,1,0,1,1,1,1,0,1,0,1)\\
\boldsymbol{Y}_8 &= (1,0,1,0,1,1,1,1,1,1,0,1,1)\\
\boldsymbol{Y}_9 &= (1,1,1,0,1,0,1,1,1,0,1,1,1)\\
\boldsymbol{Y}_{10} &= (0,0,0,1,1,1,1,1,1,0,1,1,0)
\end{aligned}
$$

(m) Beskriv til slutt kort hvordan du ville gå fram dersom du skulle beregne h eksakt for nettverkssystemet over. [Det er ikke meningen at du skal utføre beregningen i detalj. Det er tilstrekkelig å gi en overordnet beskrivelse av metoden.]

Oppgave 2

La (C, ϕ) være et ikke-trivielt binært monotont system av n komponenter, og anta at ingen av komponentene er i serie eller parallell med resten av systemet. Vi antar at alle komponentene er stokastisk uavhengige og at alle har samme pålitelighet p. Påliteligheten til systemet kan da uttrykkes som $h = h(p)$.

(a) Vis at under de nevnte forutsetninger så eksisterer det en $p_0 \in \langle 0, 1\rangle$ som er slik at $h(p_0) = p_0$.

[Hint: Vis først at under de nevnte forutsetninger så er den deriverte av h lik 0 for p lik 0 og 1.]

Du kan i det etterfølgende betrakte følgende resultat som kjent:

Oppgaven fortsetter på neste side

(23) $h^{\alpha}(p) < h(p^{\alpha}), \quad \forall 0 < p < 1, \text{ og } \forall 0 < \alpha < 1.$

(b) Vis at dersom p_0 er som nevnt i punkt (a), så holder følgende to ulikheter:

(24) $h(p) < p$ dersom $p \in \langle 0, p_0 \rangle$

(25) $h(p) > p$ dersom $p \in \langle p_0, 1 \rangle$

(c) Hvilken praktisk nytte kan vi ha av resultatene i (a) og (b)?

Oppgave 3
(a) Hva vil det si at stokastiske variable, $T_1,\ldots, T_n$ er assosierte?

(b) Vis at hvis $T_1,\ldots, T_n$ er assosierte, og $f_1,\ldots,f_m$ er ikke-avtagende funksjoner av $T_1,\ldots, T_n$, så er også $f_1(T_1,\ldots, T_n),\ldots,f_m(T_1,\ldots, T_n)$ assosierte.

SLUTT