

UNIVERSITETET I OSLO

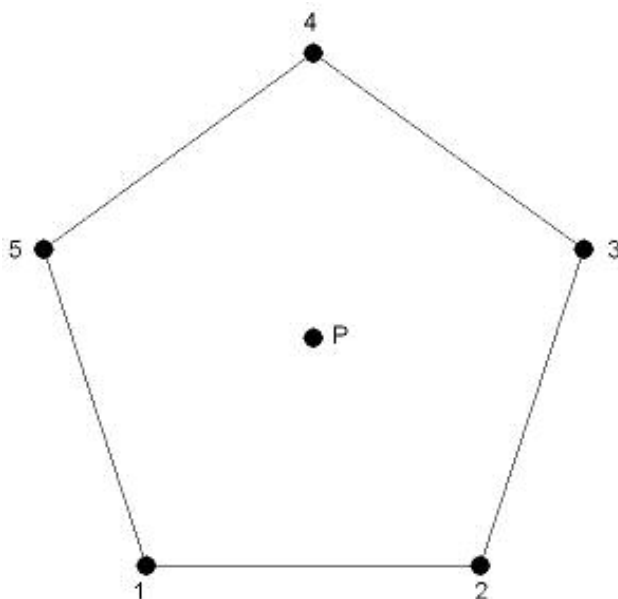
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

| | |
|------------------------|--|
| Eksamen i: | STK 2400 - Elementær innføring i risiko- og pålitelighetsanalyse |
| Eksamensdag: | Torsdag 4. desember 2003 |
| Tid til eksamen: | 0900 - 1200 |
| Tillatte hjelpemidler: | Lommeregner. |

Opgavesettet er på 3 sider.

Kontrollér at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Vi skal i denne oppgaven betrakte et system for å styre en elektronstråle (ikke ulikt det som benyttes i TV-skjermer). Systemet består av fem elektromagneter plassert i hjørnene av en likesidet femkant. Elektronstrålen sendes ut fra en kilde bak denne femkanten, og vil passere femkanten nær sentrum av denne. En svært forenklet tegning av systemet er vist i Figur 1.



Figur 1. Et system for styring av en elektronstråle

I figuren er systemets komponenter, dvs. elektromagnetene, merket 1, ..., 5, mens punktet der elektronstrålen passerer, er merket P . For å kunne styre elektronstrålen er det ikke nødvendig at alle elektromagnetene virker. Det er nødvendig og tilstrekkelig at punktet P ligger innenfor det polygonet som utspennes av de hjørnene i femkanten som svarer til de komponentene som virker. Dette betyr f.eks. at minst tre komponenter må virke for at systemet skal virke. Det er

imidlertid ikke alle kombinasjoner av tre komponenter som er tilstrekkelig. F.eks. ser vi at trekanten som spennes ut av hjørnene 1, 2 og 3, *ikke* inneholder P . Hvis derimot f.eks. komponentene 1, 2 og 4 virker, så er dette tilstrekkelig ettersom trekanten med disse hjørnene inneholder P .

(a) Finn systemets minimale stimengder (5 stykker), og systemets minimale kuttmengde (også 5 stykker).

(b) Vis at systemets strukturfunksjon kan skrives som:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \phi(\mathbf{X}) &= X_1 X_2 X_4 + X_2 X_3 X_5 + X_1 X_3 X_4 + X_2 X_4 X_5 + X_1 X_3 X_5 \\ &- X_1 X_2 X_3 X_4 - X_1 X_2 X_3 X_5 - X_1 X_2 X_4 X_5 - X_1 X_3 X_4 X_5 - X_2 X_3 X_4 X_5 \\ &+ X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 \end{aligned}$$

der X_1, \dots, X_5 er tilstandsvariablene for de fem komponentene.

(c) Legg merke til at alle koeffisientene i uttrykket (1.1) er enten +1 eller -1. Nevn en annen type systemer der dette også alltid er tilfelle.

(d) Anta i første omgang at komponentene er stokastisk uavhengige, og at alle komponentene har pålitelighet p . Vis at systempåliteligheten, h , da kan skrives:

$$(1.2) \quad h(p) = 5p^3 - 5p^4 + p^5$$

(e) Anta spesielt at $p = 0.75$. Beregn h for denne verdien av p . [Svar: 0.7646]

(f) Forklar hvorfor det følger av beregningen i (e) at $h(p) > p$ dersom $0.75 < p < 1.0$.

(g) Lag en skisse av hvordan h varierer som funksjon av p . Kommentér figuren.

Vi antar i resten av denne oppgaven at elektromagnetene kan svikte på to måter: enten ved at de brenner opp og slutter å virke av den grunn, eller ved at strømmen svikter. Dersom strømmen svikter, svikter alle magnetene. Vi innfører så:

$$(1.3) \quad Y_i = \begin{cases} 1 & \text{dersom } i\text{-te magnet ikke er brent opp} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, 5.$$

$$(1.4) \quad Z = \begin{cases} 1 & \text{dersom strømmen ikke har sviktet} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Vi antar nå at Y_1, \dots, Y_5 og Z er stokastisk uavhengige og at:

$$(1.5) \quad \Pr(Y_i = 1) = \alpha, \quad i = 1, \dots, 5, \quad \text{mens } \Pr(Z = 1) = \theta$$

(h) Forklar kort hvorfor vi da har at:

$$(1.6) \quad \Pr(X_i = 1) = \alpha\theta \quad i = 1, \dots, 5.$$

Er X_1, \dots, X_5 assosierte under disse betingelsene? Begrunn svaret.

(i) Beregn $\text{Cov}(X_i, X_j)$, for $i \neq j$.

(j) Beregn til slutt påliteligheten til systemet uttrykt ved α og θ .

SLUTT