UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK 2400 - Elementær innføring i risiko- og pålitelighetsanalyse
Eksamensdag:	Onsdag 6. desember 2006
Tid til eksamen:	15.30 – 18.30
Tillatte hjelpemidler:	Rottmanns "Mathematische Formelsammlung", kalkulator.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Kontrollér at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

I denne oppgaven skal vi se på en type system som kalles et terskelsystem. Et binært monotont system, (C, ϕ), med komponentmengde $C = \{1, \ldots, n\}$ og strukturfunksjon ϕ, sies å være et *terskelsystem* dersom strukturfunksjonen kan skrives på følgende form:

$$\phi(\boldsymbol{X}) = \mathrm{I}(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \geq b), \tag{1}$$

der $a_1, \ldots, a_n$ og b er ikke-negative konstanter, og $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ betegner vektoren av komponent-tilstandsvariable. Funksjonen $\mathrm{I}(\cdot)$ betegner indikatorfunksjonen, dvs. $\mathrm{I}(A) = 1$ dersom kriteriet A er oppfylt, og 0 ellers. Konstantene $a_1, \ldots, a_n$ kalles for systemets komponentvekter, mens konstanten b kalles systemets terskelverdi.

(a) La (C, ϕ) være et terskelsystem der alle komponentvektene er lik 1 og der terskelverdien er lik k, der k er et heltall slik at $1 \leq k \leq n$. Hva slags system er dette?

(b) La (C, ϕ_1) og (C, ϕ_2) være to terskelsystemer med felles komponentvekter $a_1, \ldots, a_n$ som alle er positive, og med terskelverdier henholdsvis b_1 og b_2 gitt ved:

$$\begin{aligned} b_1 &= \sum_{i=1}^{n} a_i & (2) \\ b_2 &= \min_{1 \leq i \leq n} a_i. & (3) \end{aligned}$$

Hva slags systemer er (C, ϕ_1) og (C, ϕ_2)?

(c) La (C, ϕ) være et terskelsystem og la (C, ϕ^D) betegne det duale systemet. Vis at (C, ϕ^D) også er et terskelsystem.

I resten av denne oppgaven lar vi (C, ϕ_b) betegne et terskelsystem der $C = \{1, \ldots, 5\}$, $b \in \{1, \ldots, 8\}$, og der:

$$\phi_b(\boldsymbol{X}) = \mathrm{I}(3X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \geq b). \tag{4}$$

Videre betegner vi påliteligheten til (C, ϕ_b) med h_b.

(d) Finn de minimale sti- og kuttmengdene til (C, ϕ_3).

(e) Vis at:

$$\begin{aligned} \phi_3(1_1, \boldsymbol{X}) &= 1, & (5) \\ \phi_3(0_1, \boldsymbol{X}) &= X_2(X_2 \coprod X_4 \coprod X_5) + (1 - X_2)(X_1 X_4 X_5). & (6) \end{aligned}$$

(f) Anta at $X_1, \ldots X_5$ er stokastisk uavhengige og at $\Pr(X_i = 1) = p_i$, $i = 1, \ldots, 5$. La videre $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$. Finn påliteligheten $h_3 = h_3(\boldsymbol{p})$ til systemet (C, ϕ_3).

(g) Birnbaum-målet for den pålitelighetsmessige betydning av i-te komponent i systemet (C, ϕ_b) er definert som:

$$I_B^i(\phi_b) = \frac{\partial h_b(\boldsymbol{p})}{\partial p_i}, \; i = 1, \ldots, 5. \tag{7}$$

Beregn $I_B^1(\phi_3)$.

(h) Anta at $p_1 < \cdots < p_5$. Hvilken komponent har høyest pålitelighetsmessig betydning i (C, ϕ_1)? Hva er den tilsvarende konklusjonen dersom vi istedet ser på (C, ϕ_8)? Kommenter svaret.

(i) I resten av oppgaven antar vi at $p_1 = \cdots = p_5 = p$, og innfører:

$$S = 3X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 + X_5. \tag{8}$$

Forklar kort hvorfor $S \in \{0, 1, \ldots, 8\}$. Finn sannsynlighetsfordelingen til S uttrykt ved p.

(j) Forklar hvorfor:

$$h_b = h_b(p) = \Pr(S \geq b), \; b = 1, \ldots, 8, \tag{9}$$

og benytt dette til finne h_5.

(k) For hvilke verdier av b vil $h_b(p) \geq p$ for alle $p \in [0, 1]$? For hvilke verdier av b vil $h_b(p) \leq p$ for alle $p \in [0, 1]$? Begrunn svaret.

Oppgave 2

Definer hva det vil si at stokastiske variable $T_1, \ldots T_n$ er *assosierte*. Gi en kort beskrivelse av hvordan dette begrepet kan brukes i pålitelighetsanalyse.