UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK2400 — Elementær innføring i risiko- og pålitelighets-analyse
Eksamensdag:	Torsdag 6. desember, 2007
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30

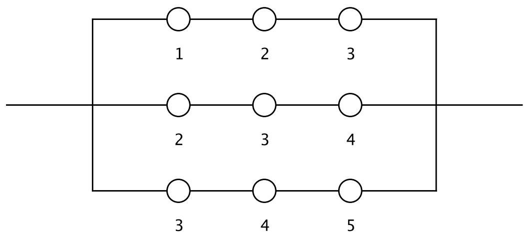
Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Rottmanns "Mathematische Formelsammlung", kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

I denne oppgaven skal vi se på et binært monotont system (C, ϕ) med komponentmengde $C = \{1, \dots, 5\}$ og strukturfunksjon ϕ. Et blokkdiagram av systemet er vist i figuren under:



Vi innfører også vektoren av komponent-tilstandsvariable, $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_5)$.

(Fortsettes side 2.)

(a) Finn systemets minimale stimengder (3 stykker) og minimale kuttmengder (4 stykker). Er noen av komponentene i serie eller parallell med resten av systemet? Begrunn svaret.

(b) Vis at strukturfunksjonen for systemet kan skrives:

$$\phi(\boldsymbol{X}) = X_1X_2X_3 + X_2X_3X_4 + X_3X_4X_5 - X_1X_2X_3X_4 - X_2X_3X_4X_5.$$

(c) Anta at $X_1, \ldots X_5$ er stokastisk uavhengige, og at $\Pr(X_i = 1) = p_i$, $i = 1, \ldots, 5$. La videre $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_5)$. Finn påliteligheten, $h(\boldsymbol{p})$, til systemet.

(d) I dette punktet antar vi i stedet at X_1, X_2 og X_3 er assosierte stokastiske variable, og uavhengig av X_4 og X_5, og at X_4 og X_5 er uavhengige innbyrdes. Hvordan påvirker dette påliteligheten til systemet i forhold til beregningen i det foregående punktet? Begrunn svaret.

[Hint: Det kan lønne seg å skrive strukturfunksjonen på formen:

$$\phi(\boldsymbol{X}) = X_1X_2X_3(1 - X_4) + X_2X_3X_4(1 - X_5) + X_3X_4X_5.$$

Beregn så påliteligheten ved å ta forventning ledd for ledd og benytt teori for assosierte stokastiske variable.]

I resten av oppgaven antar vi igjen at $X_1, \ldots X_5$ er stokastisk uavhengige.

(e) Birnbaum-målet for den pålitelighetsmessige betydning av i-te komponent i systemet (C, ϕ) er definert som:

$$I_B^{(i)} = \frac{\partial h(\boldsymbol{p})}{\partial p_i}, \qquad i = 1, \ldots, 5.$$

Vis at dette medfører at:

$$I_B^{(i)} = E[\phi(1_i, \boldsymbol{X}) - \phi(0_i, \boldsymbol{X})], \qquad i = 1, \ldots, 5,$$

og forklar hvordan dette kan brukes til å utvide definisjonen av Birnbaum-målet til systemer av avhengige komponenter.

(f) Finn $I_B^{(1)}, \ldots, I_B^{(5)}$ uttrykt ved $p_1, \ldots, p_5$.

[Svar:

$$\begin{aligned}
I_B^{(1)} &= p_2p_3 - p_2p_3p_4, \\
I_B^{(2)} &= p_1p_3 + p_3p_4 - p_1p_3p_4 - p_3p_4p_5, \\
I_B^{(3)} &= p_1p_2 + p_2p_4 + p_4p_5 - p_1p_2p_4 - p_2p_4p_5, \\
I_B^{(4)} &= p_2p_3 + p_3p_5 - p_1p_2p_3 - p_2p_3p_5, \\
I_B^{(5)} &= p_3p_4 - p_2p_3p_4.
\end{aligned}$$

Om du ikke skulle få til å vise dette, kan du likevel benytte disse svarene videre i oppgaven.]

(g) Anta at $p_1 = \cdots = p_5 = p$, der $0 < p < 1$. Vis at vi da har:

$$I_B^{(3)} > I_B^{(2)} = I_B^{(4)} > I_B^{(1)} = I_B^{(5)}.$$

(Fortsettes side 3.)

(h) Anta mer spesielt at $p = 1/2$. Forklar hvorfor vi i dette tilfellet har for $i = 1, \ldots, 5$ at:

$$2^4 I_B^{(i)} = \text{Antall kritiske stivektorer for komponent } i,$$

Benytt dette samt utregningene i de tidligere punktene til å beregne antall kritiske stivektorer for komponentene i systemet.

(i) I dette punktet antar vi at $p_3 = 1$ og at $p_1 = p_2 = p_4 = p_5 = p$. La videre $h(p)$ betegne påliteligheten til systemet som funksjon av p. Vis først at:

$$h(p) = 3p^2 - 2p^3.$$

Vis deretter at funksjonen h tilfredsstiller følgende betingelse:

$$h(p) = 1 - h(1 - p).$$

Lag en skisse av h. Kommentér figuren.

Oppgave 2.

La (C, ϕ) være et binært monotont system med komponentmengde $C = \{1, \ldots, n\}$ og strukturfunksjon ϕ. La videre vektoren av komponent-tilstandsvariable være $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Vi antar at $X_1, \ldots, X_n$ er uavhengige og identisk fordelte binære variable med $P(X_i = 1) = p$, for $i = 1, \ldots, n$. Vi innfører så $S = \sum_{i=1}^n X_i$. La også $\theta_s = E[\phi | S = s]$, $s = 0, 1, \ldots, n$.

(a) Vis at:

$$P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} | S = s) = \frac{1}{\binom{n}{s}},$$

for alle $\boldsymbol{x}$ som er slik at $\sum_{i=1}^n x_i = s$. Vis at videre at:

$$\theta_s = \frac{b_s}{\binom{n}{s}}, \qquad s = 0, 1, \ldots, n,$$

der b_s = antall stimengder i (C, ϕ) som inneholder s komponenter.

(b) Forklar hvordan man kan estimere $\theta_0, \ldots, \theta_n$ ved hjelp av simulering, og gjør kort rede for hvordan dette kan benyttes til å estimere $h(p)$ for $0 < p < 1$.

SLUTT