Eksamen STK2400, 6/12-06 - Løsningsforslag

Arne Bang Huseby

December 28, 2006

Oppgave 1

(a) La (C, ϕ) være et terskelsystem der alle komponentvektene er lik 1 og der terskelverdien er lik k, der k er et heltall slik at $1 \leq k \leq n$. Hva slags system er dette?

Løsning

I dette tilfellet blir altså strukturfunksjonen gitt ved:

$$\phi(\boldsymbol{X}) = \mathrm{I}(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq k). \tag{1}$$

Her ser vi at systemet virker hvis og bare hvis minst k av de n komponentene virker. Et slikt system kalles et k-av-n-system ■

(b) La (C, ϕ_1) og (C, ϕ_2) være to terskelsystemer med felles komponentvekter $a_1, \ldots, a_n$ som alle er positive, og med terskelverdier henholdsvis b_1 og b_2 gitt ved:

$$b_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{2}$$

$$b_2 = \min_{1 \leq i \leq n} a_i. \tag{3}$$

Hva slags systemer er (C, ϕ_1) og (C, ϕ_2)?

Løsning

Vi ser at (C, ϕ_1) virker hvis og bare hvis *alle* komponentene virker. Dette kalles et *seriesystem*.

Tilsvarende ser vi at (C, ϕ_2) virker hvis og bare hvis *minst en* av komponentene virker. Dette kalles et *parallellsystem* ■

(c) La (C, ϕ) være et terskelsystem og la (C, ϕ^D) betegne det duale systemet. Vis at (C, ϕ^D) også er et terskelsystem.

Løsning

Vi ser på strukturfunksjonen til (C, ϕ^D). Denne blir:

$$\begin{aligned}
\phi^D(\boldsymbol{X}^D) &= 1 - \phi(\mathbf{1} - \boldsymbol{X}^D) \\
&= 1 - \mathrm{I}(\sum_{i=1}^n a_i(1 - X_i^D) \geq b) \\
&= 1 - \mathrm{I}(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n a_i X_i^D \geq b) \\
&= 1 - \mathrm{I}(\sum_{i=1}^n a_i X_i^D \leq \sum_{i=1}^n a_i - b) \\
&= \mathrm{I}(\sum_{i=1}^n a_i X_i^D > \sum_{i=1}^n a_i - b) \\
&= \mathrm{I}(\sum_{i=1}^n a_i X_i^D \geq \sum_{i=1}^n a_i - b + \epsilon)
\end{aligned}$$

der $\epsilon > 0$ er et tilstrekkelig lite tall. Eksistens av en slik ϵ følger av at $\sum_{i=1}^n a_i X_i^D$ kun kan anta et endelig antall verdier når $\boldsymbol{X}$ varierer. Av det ovenstående ser vi at det duale systemet også er et terskelsystem med samme komponentvekter som det opprinnelige systemet, og med terskelverdi $\sum_{i=1}^n a_i - b + \epsilon$ ■

I resten av denne oppgaven lar vi (C, ϕ_b) betegne et terskelsystem der $C = \{1, \ldots, 5\}$, $b \in \{1, \ldots, 8\}$, og der:

$$\phi_b(\boldsymbol{X}) = \mathrm{I}(3X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \geq b). \tag{4}$$

Videre betegner vi påliteligheten til (C, ϕ_b) med h_b.

(d) Finn de minimale sti- og kuttmengdene til (C, ϕ_3).

Løsning

Vi finner følgende mengder:

Minimale stimengder: $\{1\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$.
Minimale kuttmengder: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 3, 4, 5\}$ ■

(e) Vis at:

$$\begin{aligned}
\phi_3(1_1, \boldsymbol{X}) &= 1, && (5) \\
\phi_3(0_1, \boldsymbol{X}) &= X_2(X_3 \coprod X_4 \coprod X_5) + (1 - X_2)(X_3 X_4 X_5). && (6)
\end{aligned}$$

Løsning

Ved innsetning av $X_1 = 1$ ser vi at:

$$\begin{aligned} \phi_3(1_1, \boldsymbol{X}) &= \mathrm{I}(3 \cdot 1 + 2X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \geq 3) \\ &= \mathrm{I}(2X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \geq 0) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Videre har vi ved innsetning av $X_1 = 0$ og pivot-dekomposisjon med hensyn på X_2 at:

$$\begin{aligned} \phi_3(0_1, \boldsymbol{X}) &= \mathrm{I}(3 \cdot 0 + 2X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \geq 3) \\ &= \mathrm{I}(2X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \geq 3) \\ &= X_2\,\mathrm{I}(2 \cdot 1 + X_3 + X_4 + X_5 \geq 3) + (1 - X_2)\,\mathrm{I}(2 \cdot 0 + X_3 + X_4 + X_5 \geq 3) \\ &= X_2\,\mathrm{I}(X_3 + X_4 + X_5 \geq 1) + (1 - X_2)\,\mathrm{I}(X_3 + X_4 + X_5 \geq 3) \\ &= X_2(X_3 \coprod X_4 \coprod X_5) + (1 - X_2)(X_3 X_4 X_5), \end{aligned}$$

der siste likhet følger av resultatet i punkt (b) (eller alternativt av resultatet i punkt (a)) ■

(f) Anta at $X_1, \ldots X_5$ er stokastisk uavhengige og at $\Pr(X_i = 1) = p_i$, $i = 1, \ldots, 5$. La videre $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$. Finn påliteligheten $h_3 = h_3(\boldsymbol{p})$ til systemet (C, ϕ_3).

Løsning

Av punkt (e) følger det at:

$$\begin{aligned} \phi_3(\boldsymbol{X}) &= X_1 \phi_3(1_1, \boldsymbol{X}) + (1 - X_1)\phi_3(0_1, \boldsymbol{X}) \\ &= X_1 + (1 - X_1)[X_2(X_3 \coprod X_4 \coprod X_5) + (1 - X_2)(X_3 X_4 X_5)]. \end{aligned}$$

Påliteligheten $h_3 = \mathrm{E}(\phi_3)$ blir dermed:

$$h_3(\boldsymbol{p}) = p_1 + (1 - p_1)[p_2(p_3 \coprod p_4 \coprod p_5) + (1 - p_2)(p_3 p_4 p_5)].$$

■

(g) Birnbaum-målet for den pålitelighetsmessige betydning av i-te komponent i systemet (C, ϕ_b) er definert som:

$$I_B^i(\phi_b) = \frac{\partial h_b(\boldsymbol{p})}{\partial p_i},\ i = 1, \ldots, 5. \tag{7}$$

Beregn $I_B^1(\phi_3)$.

Løsning

Ved pivot-dekomposisjon med hensyn på X_1 får vi:

$$\begin{aligned} I_B^1(\phi_3) &= \frac{\partial}{\partial p_1}[p_1 h_3(1_1, \boldsymbol{p}) + (1-p_1)h_3(0_1, \boldsymbol{p})] \\ &= h_3(1_1, \boldsymbol{p}) - h_3(0_1, \boldsymbol{p}) \\ &= 1 - [p_2(p_3 \coprod p_4 \coprod p_5) + (1-p_2)(p_3 p_4 p_5)]. \end{aligned}$$

■

(h) Anta at $p_1 < \cdots < p_5$. Hvilken komponent har høyest pålitelighetsmessig betydning i (C, ϕ_1)? Hva er den tilsvarende konklusjonen dersom vi istedet ser på (C, ϕ_8)? Kommenter svaret.

Løsning

Fra punkt (b) vet vi at (C, ϕ_1) er et parallellsystem. I et parallellsystem vil den komponenten som har høyest pålitelighet også ha høyest pålitelighetsmessig betydning, dvs. komponent 5 i dette tilfellet.

Fra punkt (b) vet vi også at (C, ϕ_8) er et seriesystem. I et seriesystem vil den komponenten som har lavest pålitelighet ha høyest pålitelighetsmessig betydning, dvs. komponent 1 i dette tilfellet ■

(i) I resten av oppgaven antar vi at $p_1 = \cdots = p_5 = p$, og innfører:

$$S = 3X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 + X_5. \tag{8}$$

Forklar kort hvorfor $S \in \{0, 1, \ldots, 8\}$. Finn sannsynlighetsfordelingen til S uttrykt ved p.

Løsning

Siden $X_1, \ldots, X_5$ er binære og alle komponentvektene er hele tall, vil S alltid være et heltall. Den minste verdien S kan anta er 0, og oppnås dersom $X_1 = \cdots = X_5 = 0$. Den største verdien som S kan anta er 8, og oppnås dersom $X_1 = \cdots = X_5 = 1$. Ved å variere $\boldsymbol{X}$ over alle mulige binære 5-dimensjonale vektorer, er det lett å se at S også kan anta verdiene $1, 2, \ldots, 7$. F.eks. vil $S = 1$ dersom nøyaktig en av variablene X_3, X_4, X_5 er lik 1, mens de øvrige fire er null.

Sannsynlighetsfordelingen for S finnes f.eks. ved å benytte følgende formel:

$$\Pr(S = s) = \sum_{\boldsymbol{x}} \mathrm{I}(3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = s) p^{\sum_{i=1}^5 x_i}(1-p)^{5 - \sum_{i=1}^5 x_i},$$

der summen tas over alle binære 5-dimensjonale vektorer. Etter sammentrekning får vi dermed følgende:

$$
\begin{aligned}
\Pr(S=0) &= (1-p)^5 \\
\Pr(S=1) &= 3p(1-p)^4 \\
\Pr(S=2) &= p(1-p)^4 + 3p^2(1-p)^3 \\
\Pr(S=3) &= p(1-p)^4 + 3p^2(1-p)^3 + p^3(1-p)^2 \\
\Pr(S=4) &= 3p^2(1-p)^3 + 3p^3(1-p)^2 \\
\Pr(S=5) &= p^2(1-p)^3 + 3p^3(1-p)^2 + p^4(1-p) \\
\Pr(S=6) &= 3p^3(1-p)^2 + p^4(1-p) \\
\Pr(S=7) &= 3p^4(1-p) \\
\Pr(S=8) &= p^5.
\end{aligned}
$$

■

(j) Forklar hvorfor:

$$h_b = h_b(p) = \Pr(S \geq b),\ b = 1, \ldots, 8, \tag{9}$$

og benytt dette til å finne h_5.

Løsning

Vi har at:

$$
\begin{aligned}
h_b(p) &= \mathrm{E}[\phi_b(\boldsymbol{X})] \\
&= \mathrm{E}[\mathrm{I}(3X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \geq b)] \\
&= \Pr(3X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \geq b) \\
&= \Pr(S \geq b).
\end{aligned}
$$

Herav får vi spesielt at:

$$
\begin{aligned}
h_5(p) &= \Pr(S \geq 5) \\
&= \Pr(S=5) + \Pr(S=6) + \Pr(S=7) + \Pr(S=8) \\
&= p^2(1-p)^3 + 3p^3(1-p)^2 + p^4(1-p) \\
&+ 3p^3(1-p)^2 + p^4(1-p) \\
&+ 3p^4(1-p) \\
&+ p^5 \\
&= p^2(1-p)^3 + 6p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5
\end{aligned}
$$

■

(k) For hvilke verdier av b vil $h_b(p) \geq p$ for alle $p \in [0,1]$? For hvilke verdier av b vil $h_b(p) \leq p$ for alle $p \in [0,1]$? Begrunn svaret.

Løsning

La $h = h(p)$ være pålitelighetsfunksjonen til et system der alle komponentene har pålitelighet p. S-form-teoremet sier at dersom systemet ikke har stier eller kutt av lengde 1, s finnes det en $p_0 \in (0, 1)$ slik at:

$$\begin{aligned} h(p) &= p, \text{ for } p = p_0, \\ h(p) &< p, \text{ for } 0 < p < p_0, \\ h(p) &> p, \text{ for } p_0 < p < 1. \end{aligned}$$

Videre, dersom systemet har minst en sti av lengde 1, så vil:

$$h(p) \geq p, \text{ for } 0 \leq p \leq 1.$$

Tilsvarende dersom systemet har minst et kutt av lengde 1, så vil:

$$h(p) \leq p, \text{ for } 0 \leq p \leq 1.$$

I vårt tilfelle vil komponent 1 være i parallell med resten av systemet dersom $a_1 \geq b$, dvs. dersom $b \leq 3$. Tilsvarende vil komponent 1 vil være i serie med resten av systemet dersom $\sum_{i=2}^{5} a_i < b$, dvs. dersom $b > 5$. Hvis $3 < b \leq 5$, vil systemet ikke ha noen komponenter i serie eller parallell med resten av systemet.

Herav følger det at:

$$\begin{aligned} h_b(p) \geq p, &\text{ for } 0 \leq p \leq 1 \text{ dersom } b = 1, 2, 3, \\ h_b(p) \leq p, &\text{ for } 0 \leq p \leq 1 \text{ dersom } b = 6, 7, 8. \end{aligned}$$

■

Oppgave 2

Definer hva det vil si at stokastiske variable $T_1, \ldots T_n$ er *assosierte*. Gi en kort beskrivelse av hvordan dette begrepet kan brukes i pålitelighetsanalyse.

Løsning

De stokastiske variable $T_1, \ldots T_n$ sies å være *assosierte* dersom:

$$\text{Cov}(\Gamma(\boldsymbol{T}), \Delta(\boldsymbol{T})) \geq 0,$$

for alle par av binære ikke-avtagende funksjoner Γ og Δ, der $\boldsymbol{T} = (T_1, \ldots, T_n)$.

Assosierthet er en form for *positiv* avhengighet. I situasjoner der komponenttilstandsvariablene for et system ikke kan antas å være uavhengige, kan man ofte argumentere for at tilstandsvariablene i det minste er assosierte. Ved å benytte teorien for assosierte stokastiske variable, kan man dermed finne øvre og nedre grenser for systempåliteligheten ■