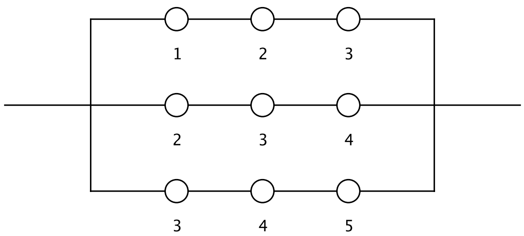
Eksamen STK2400, 6/12-07 - Løsningsforslag

Arne Bang Huseby

December 19, 2007

Oppgave 1

I denne oppgaven skal vi se på et binært monotont system (C, ϕ) med komponentmengde $C = \{1, \ldots, 5\}$ og strukturfunksjon ϕ. Et blokkdiagram av systemet er vist i figuren under:



Vi innfører også vektoren av komponent-tilstandsvariable, $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_5)$.

(a) Finn systemets minimale stimengder (3 stykker) og minimale kuttmengder (4 stykker). Er noen av komponentene i serie eller parallell med resten av systemet? Begrunn svaret.

Løsning:

Minimale stimengder:

$$P_1 = \{1, 2, 3\}, \ P_2 = \{2, 3, 4\}, \ P_3 = \{3, 4, 5\}.$$

Minimale kuttmengder:

$$K_1 = \{3\}, \ K_2 = \{1, 4\}, \ K_3 = \{2, 4\}, \ K_4 = \{2, 5\}.$$

Vi ser at den minimale kuttmengden K_1 inneholder kun en komponent. Denne komponenten er derfor i serie med resten av systemet. Dvs. dersom denne komponenten svikter, så svikter systemet.

Ettersom det ikke finnes noen minimale stimengder med kun en komponent, kan det ikke være noen komponenter i parallell med resten av systemet. (For systemer med minst to relevante komponenter, kan vi forøvrig aldri både ha komponenter i serie og parallell med resten av systemet.)

(b) Vis at strukturfunksjonen for systemet kan skrives:

$$\phi(\boldsymbol{X}) = X_1X_2X_3 + X_2X_3X_4 + X_3X_4X_5 - X_1X_2X_3X_4 - X_2X_3X_4X_5.$$

Løsning:

Vi tar utgangspunkt i de minimale stimengdene, og benytter formelen:

$$\phi(\boldsymbol{X}) = \coprod_{j=1}^{3} \prod_{i \in P_j} X_i = 1 - (1 - X_1X_2X_3)(1 - X_2X_3X_4)(1 - X_3X_4X_5)$$

Ved å multiplisere ut og trekke sammen, får vi den oppgitte formelen.

(c) Anta at $X_1, \ldots X_5$ er stokastisk uavhengige, og at $\Pr(X_i = 1) = p_i$, $i = 1, \ldots, 5$. La videre $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_5)$. Finn påliteligheten, $h(\boldsymbol{p})$, til systemet.

Løsning:

Vi benytter uttrykket for strukturfunksjonen fra forrige punkt, og får:

$$h(\boldsymbol{p}) = E[\phi(\boldsymbol{X})] = p_1p_2p_3 + p_2p_3p_4 + p_3p_4p_5 - p_1p_2p_3p_4 - p_2p_3p_4p_5.$$

Forventningen beregnes ved å ta forventning ledd for ledd, samt å benytte at $X_i$ene er stokastisk uavhengige.

(d) I dette punktet antar vi i stedet at X_1, X_2 og X_3 er assosierte stokastiske variable, og uavhengig av X_4 og X_5, og at X_4 og X_5 er uavhengige innbyrdes. Hvordan påvirker dette påliteligheten til systemet i forhold til beregningen i det foregående punktet? Begrunn svaret.

[Hint: Det kan lønne seg å skrive strukturfunksjonen på formen:

$$\phi(\boldsymbol{X}) = X_1X_2X_3(1 - X_4) + X_2X_3X_4(1 - X_5) + X_3X_4X_5.$$

Beregn så påliteligheten ved å ta forventning ledd for ledd og benytt teori for assosierte stokastiske variable.]

Løsning:

Siden X_1, X_2 og X_3 er assosierte stokastiske variable, følger det av teorien for slik at vi har:

$$\begin{aligned} E[X_1X_2X_3] &\geq p_1p_2p_3 \\ E[X_2X_3] &\geq p_2p_3 \end{aligned}$$

Ved å slå sammen ledd nummer 1 og 4, og ledd nummer 2 og 5 i uttrykket for strukturfunksjonen, får vi at:

$$\phi(\boldsymbol{X}) = X_1X_2X_3(1 - X_4) + X_2X_3X_4(1 - X_5) + X_3X_4X_5.$$

Påliteligheten til systemet, dvs. $E[\phi]$, finnes igjen ved å ta forventning ledd for ledd:

$$E[\phi] = E[X_1X_2X_3](1 - p_4) + E[X_2X_3]p_4(1 - p_5) + p_3p_4p_5.$$

Ved å benytte ulikhetene som følger av at X_1, X_2 og X_3 er assosierte, samt at $(1 - p_4)$ og $p_4(1 - p_5)$ er ikke-negative, får vi at:

$$E[\phi] \geq p_1p_2p_3(1 - p_4) + p_2p_3p_4(1 - p_5) + p_3p_4p_5,$$

der uttrykket på høyre side av ulikheten kan fortolkes som påliteligheten til systemet dersom X_1, X_2 og X_3 er uavhengige. Følgelig ser vi at påliteligheten til systemet *underestimeres* dersom vi ignorerer avhengigheten mellom X_1, X_2 og X_3.

I resten av oppgaven antar vi igjen at $X_1, \dots X_5$ er stokastisk uavhengige.

(e) Birnbaum-målet for den pålitelighetsmessige betydning av i-te komponent i systemet (C, ϕ) er definert som:

$$I_B^{(i)} = \frac{\partial h(\boldsymbol{p})}{\partial p_i}, \qquad i = 1, \dots, 5.$$

Vis at dette medfører at:

$$I_B^{(i)} = E[\phi(1_i, \boldsymbol{X}) - \phi(0_i, \boldsymbol{X})], \qquad i = 1, \dots, 5,$$

og forklar hvordan dette kan brukes til å utvide definisjonen av Birnbaum-målet til systemer av avhengige komponenter.

Løsning:

Ved å pivot-dekomponere h med hensyn på komponent i, får vi:

$$\begin{aligned}
I_B^{(i)} &= \frac{\partial h(\boldsymbol{p})}{\partial p_i} \\
&= \frac{\partial}{\partial p_i}[p_i h(1_i, \boldsymbol{p}) + (1 - p_i) h(0_i, \boldsymbol{p})] \\
&= h(1_i, \boldsymbol{p}) - h(0_i, \boldsymbol{p}) \\
&= E[\phi(1_i, \boldsymbol{X}) - \phi(0_i, \boldsymbol{X})].
\end{aligned}$$

Det siste uttrykket forutsetter ingenting om simultanfordelingen til $X_i$ene, så dette kan benyttes som en definisjon av Birnbaum-målet også i situasjoner der $X_i$ene er avhengige.

(f) Finn $I_B^{(1)}, \dots, I_B^{(5)}$ uttrykt ved $p_1, \dots, p_5$.

[Svar:

$$\begin{aligned}
I_B^{(1)} &= p_2 p_3 - p_2 p_3 p_4, \\
I_B^{(2)} &= p_1 p_3 + p_3 p_4 - p_1 p_3 p_4 - p_3 p_4 p_5, \\
I_B^{(3)} &= p_1 p_2 + p_2 p_4 + p_4 p_5 - p_1 p_2 p_4 - p_2 p_4 p_5, \\
I_B^{(4)} &= p_2 p_3 + p_3 p_5 - p_1 p_2 p_3 - p_2 p_3 p_5, \\
I_B^{(5)} &= p_3 p_4 - p_2 p_3 p_4.
\end{aligned}$$

Om du ikke skulle få til å vise dette, kan du likevel benytte disse svarene videre i oppgaven.]

Løsning:

Vi tar utgangspunkt i formelen for $h(\boldsymbol{p})$ som vi fant i punkt (c). Vi finner så $I_B^{(1)}, \dots, I_B^{(5)}$ ved å beregne de partielle deriverte med hensyn på $p_1, \dots, p_5$ henholdsvis. Dette gir umiddelbart resultatene gitt i oppgaven.

(g) Anta at $p_1 = \cdots = p_5 = p$, der $0 < p < 1$. Vis at vi da har:

$$I_B^{(3)} > I_B^{(2)} = I_B^{(4)} > I_B^{(1)} = I_B^{(5)}.$$

Løsning:

Ved å sette inn $p_1 = \cdots = p_5 = p$ i svarene fra punkt (f), får vi:

$$\begin{aligned}
I_B^{(1)} &= p^2 - p^3 = p^2(1-p), \\
I_B^{(2)} &= 2p^2 - 2p^3 = 2p^2(1-p), \\
I_B^{(3)} &= 3p^2 - 2p^3 = p^2 + 2p^2(1-p), \\
I_B^{(4)} &= 2p^2 - 2p^3 = 2p^2(1-p), \\
I_B^{(5)} &= p^2 - p^3 = p^2(1-p).
\end{aligned}$$

Når $0 < p < 1$ vil vi opplagt ha at:

$$p^2 + 2p^2(1-p) > 2p^2(1-p) > p^2(1-p).$$

Dermed følger det at:

$$I_B^{(3)} > I_B^{(2)} = I_B^{(4)} > I_B^{(1)} = I_B^{(5)}.$$

(h) Anta mer spesielt at $p = 1/2$. Forklar hvorfor vi i dette tilfellet har for $i = 1, \ldots, 5$ at:

$$2^4 I_B^{(i)} = \text{Antall kritiske stivektorer for komponent } i,$$

Benytt dette samt utregningene i de tidligere punktene til å beregne antall kritiske stivektorer for komponentene i systemet.

Løsning:

Fra punkt (e) har vi at:

$$I_B^{(i)} = E[\phi(1_i, \boldsymbol{X}) - \phi(0_i, \boldsymbol{X})] = \sum_{(\cdot_i, \boldsymbol{x})} [\phi(1_i, \boldsymbol{x}) - \phi(0_i, \boldsymbol{x})] P((\cdot_i, \boldsymbol{X}) = (\cdot_i, \boldsymbol{x}))$$

Dersom $p_1 = \cdots = p_5 = p = 1/2$, blir:

$$P((\cdot_i, \boldsymbol{X}) = (\cdot_i, \boldsymbol{x})) = 2^{-4}, \text{ for alle } (\cdot_i, \boldsymbol{x}).$$

Videre er $(\cdot_i, \boldsymbol{x})$ en kritisk stivektor for komponent i hvis og bare hvis $\phi(1_i, \boldsymbol{x}) - \phi(0_i, \boldsymbol{x}) = 1$. Ved å multiplisere uttrykket for $I_B^{(i)}$ med 2^4, får vi dermed for $i = 1, \ldots, 5$ at:

$$\begin{aligned}
2^4 I_B^{(i)} &= \sum_{(\cdot_i, \boldsymbol{x})} [\phi(1_i, \boldsymbol{x}) - \phi(0_i, \boldsymbol{x})] \\
&= \text{Antall kritiske stivektorer for komponent } i.
\end{aligned}$$

Innsetning av $p = 1/2$ i uttrykkene for $I_B^{(1)}, \ldots, I_B^{(5)}$ gir:

$$\begin{aligned}
I_B^{(1)} &= p^2 - p^3 = p^2(1-p) = 1/8, \\
I_B^{(2)} &= 2p^2 - 2p^3 = 2p^2(1-p) = 1/4, \\
I_B^{(3)} &= 3p^2 - 2p^3 = p^2 + 2p^2(1-p) = 1/2, \\
I_B^{(4)} &= 2p^2 - 2p^3 = 2p^2(1-p) = 1/4, \\
I_B^{(5)} &= p^2 - p^3 = p^2(1-p) = 1/8.
\end{aligned}$$

Herav får vi at:

$$\begin{aligned}
\text{Antall kritiske stivektorer for komponent 1} &= 16/8 = 2, \\
\text{Antall kritiske stivektorer for komponent 2} &= 16/4 = 4, \\
\text{Antall kritiske stivektorer for komponent 3} &= 16/2 = 8, \\
\text{Antall kritiske stivektorer for komponent 4} &= 16/4 = 4, \\
\text{Antall kritiske stivektorer for komponent 5} &= 16/8 = 2.
\end{aligned}$$

(i) I dette punktet antar vi at $p_3 = 1$ og at $p_1 = p_2 = p_4 = p_5 = p$. La videre $h(p)$ betegne påliteligheten til systemet som funksjon av p. Vis først at:

$$h(p) = 3p^2 - 2p^3.$$

Vis deretter at funksjonen h tilfredsstiller følgende betingelse:

$$h(p) = 1 - h(1-p).$$

Lag en skisse av h. Kommentér figuren.

Løsning:

Innsetning av $p_3 = 1$ og at $p_1 = p_2 = p_4 = p_5 = p$ i uttrykket for $h(\boldsymbol{p})$ fra punkt (c) gir:

$$h(p) = p^2 + p^2 + p^2 - p^3 - p^3 = 3p^2 - 2p^3.$$

Vi beregner så $h(1-p)$ ved innsetning $(1-p)$ i uttrykket over, og får:

$$h(1-p) = 3(1-p)^2 - 2(1-p)^3.$$

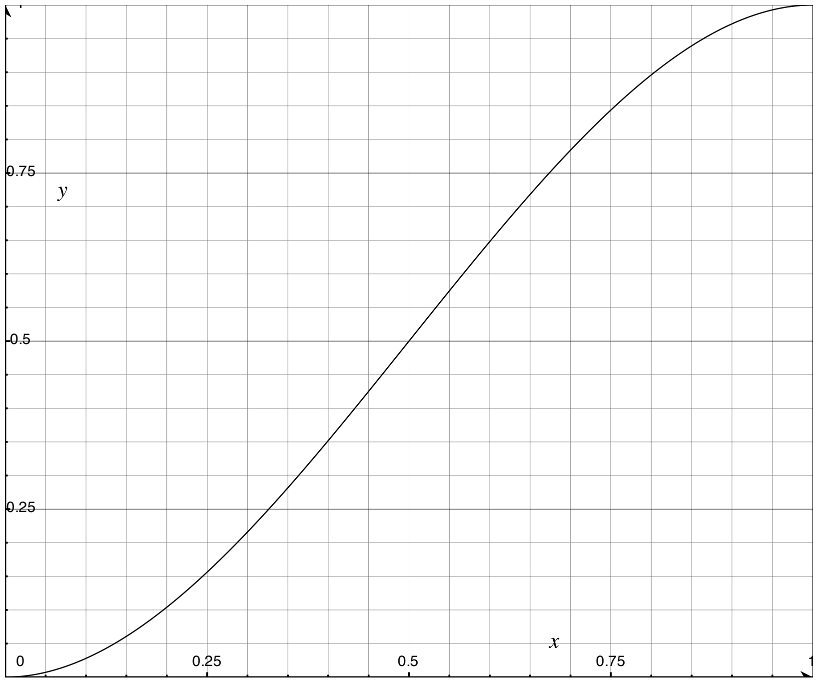
Summerer vi de to uttrykkene, får vi:

$$\begin{aligned}
h(p) + h(1-p) &= 3[p^2 + (1-p)^2] - 2[p^3 + (1-p)^3] \\
&= 3[p^2 + 1 - 2p + p^2] - 2[p^3 + 1 - 3p + 3p^2 - p^3] \\
&= 3[2p^2 - 2p + 1] - 2[3p^2 - 3p + 1] \\
&= 6p^2 - 6p + 3 - 6p^2 + 6p - 2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Herav får vi at:

$$h(p) = 1 - h(1-p).$$

Denne relasjonen viser at h går gjennom og er symmetrisk om punktet $(1/2, 1/2)$. En skisse av grafen til h er gitt under. Plottet bekrefter at kurven går gjennom og er symmetrisk om punktet $(1/2, 1/2)$. Vi ser videre at kurven har den typiske s-formen. Dette skyldes at når $p_3 = 1$, dvs. alltid funksjonerer, så finnes det ingen andre komponenter i serie med resten av systemet. Det er, som tidligere nevnt, heller ikke noen komponenter i parallel med resten av systemet. Dermed må kurven krysse den rette linjen fra $(0, 0)$ til $(1, 1)$. Dette skjer i punktet $(1/2, 1/2)$. Videre må kurven ligge under den rette linjen når $0 < p < 1/2$, og over den rette linjen når $1/2 < p < 1$.



Oppgave 2

La (C, ϕ) være et binært monotont system med komponentmengde $C = \{1, \ldots, n\}$ og strukturfunksjon ϕ. La videre vektoren av komponent-tilstandsvariable være $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Vi antar at $X_1, \ldots, X_n$ er uavhengige og identisk fordelte binære variable med $P(X_i = 1) = p$, for $i = 1, \ldots, n$. Vi innfører så $S = \sum_{i=1}^n X_i$. La også $\theta_s = E[\phi | S = s]$, $s = 0, 1, \ldots, n$.

(a) Vis at:

$$P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} | S = s) = \frac{1}{\binom{n}{s}},$$

for alle $\boldsymbol{x}$ som er slik at $\sum_{i=1}^n x_i = s$. Vis at videre at:

$$\theta_s = \frac{b_s}{\binom{n}{s}}, \qquad s = 0, 1, \ldots, n,$$

der b_s = antall stimengder i (C, ϕ) som inneholder s komponenter.

(b) Forklar hvordan man kan estimere $\theta_0, \ldots, \theta_n$ ved hjelp av simulering, og gjør kort rede for hvordan dette kan benyttes til å estimere $h(p)$ for $0 < p < 1$.

Løsning:

Benytt resultatene fra Kapittel 4 i notatet om pålitelighetsberegning ved betinget Monte Carlo simulering.

If all the components in the system have the same reliability, i.e., $p_1 = \cdots = p_n = p$, it is possible to improve things even further. In this case we note that S has a binomial distribution. Moreover, the conditional distribution of $\boldsymbol{X}$ given S is given by:

$$\Pr(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} \mid S = s) = \frac{p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}}{\binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s}} = \frac{1}{\binom{n}{s}} , \tag{4.1}$$

for all $\boldsymbol{x}$ such that $\sum_{i=1}^n x_i = s$.
From this it follows that:

$$\theta_s = E[\phi \mid S = s] = \sum_{\{\boldsymbol{x} | \sum_{i=1}^n x_i = s\}} \phi(\boldsymbol{x}) \Pr(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} \mid S = s) = \frac{b_s}{\binom{n}{s}} , \tag{4.2}$$

where b_s = the number of path sets with s components, $s = 0, \ldots, n$.
Finally, the system reliability, h, expressed as a function of p, is given by:

$$\begin{aligned} h(p) &= \sum_{s=0}^n \theta_s \Pr(S = s) \\ &= \sum_{s=0}^n \frac{b_s}{\binom{n}{s}} \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s} = \sum_{s=0}^n b_s p^s (1-p)^{n-s}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Note that the desired quantities, $\theta_0, \ldots, \theta_n$, do not depend on p. Thus, by estimating these quantities, we get an estimate of the entire $h(p)$-function. Moreover, we see that θ_s can be interpreted as the fraction of path sets of size s among all sets of size s, for $s = 0, 1, \ldots, n$. Thus, θ_s can be estimated by sampling random sets of size s and calculating the frequency of path sets among the sampled sets. It turns out that this can be done very efficiently as follows:

The idea is to sample sequences of sets of increasing size by sampling from the component set, $C = \{1, \ldots, n\}$, without replacements. The only set of size 0 is of course $\emptyset$. If $\emptyset$ is a path set, we have a trivial system which is always functioning. Obviously, $\theta_0 = 1$ in this case. Moreover, the reliability of such a system is 1. If $\emptyset$ is not a path set, it follows that $\theta_0 = 0$. In both cases we do not need to sample anything to determine the value of θ_0. Thus, we can focus on estimating $\theta_1, \ldots, \theta_n$ by sampling sets of size s, for $s = 1, \ldots, n$.

Let $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ be a vector for storing results from the simulations. Before we start the simulations, this vector is initialized as $(0, \ldots, 0)$. The simulation algorithm now runs as follows:

For $i = 1, \dots, N$ **do**

Step 1 Sample a component from the set C, say component i_1, and define $A_1 = \{i_1\}$. If A_1 is a path set, T_1 is incremented with 1.

Step 2 Sample a component from the set $C \setminus A_1$, say component i_2, and define $A_2 = \{i_1, i_2\}$. If A_2 is a path set, T_2 is incremented with 1.

Step n Sample the last remaining component, say component i_n, and define $A_n = C$. If A_n is a path set, T_n is incremented with 1.

When all the simulations are carried out, the vector T contains the number of observed path sets of sizes $1, \dots, n$. From this we get the resulting estimates of $\theta_1, \dots, \theta_n$ simply as:

$$\theta_s = T_s/N, s = 1, \dots, n. \tag{4.4}$$