UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: STK2400 — Elementær innføring i risiko- og pålitelighetsanalyse

Eksamensdag: Onsdag 8. desember 2010

Tid for eksamen: 14.30 – 18.30

Oppgavesettet er på 4 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Løsning

Oppgave 1

Vi ser at de minimale stimengdene er $\{1,2\}$,$\{1,3\}$,$\{2,3\}$.
Dermed er dette et 2-av-3 system.

Oppgave 2

(a)

$$\begin{aligned} h &= E\phi(\underline{X}) = E\left[\coprod_{j=1}^{p}\prod_{i\in P_j} X_i\right] \\ &= P\left(\bigcup_{j=1}^{p} E_j\right) \\ &\leq P(E_j) \end{aligned}$$

ved den generelle addisjonsregel for sannsynligheten for en union.

(b) Ved å slå sammen komponent 1 og 2 vil dette være en serie av to parallellsystemer. Dermed

$$\begin{aligned} \phi(\underline{x}) &= (x_1x_2 + x_3 - x_1x_2x_3)(x_4 + x_5 - x_4x_5) \\ &= x_1x_2x_4 + x_3x_4 - x_1x_2x_3x_4 \\ &+ x_1x_2x_5 + x_3x_5 - x_1x_2x_3x_5 \\ &- x_1x_2x_4x_5 - x_3x_4x_5 + x_1x_2x_3x_4x_5 \end{aligned}$$

Når komponentene er uavhengige med samme pålitelighet p, følger at

$$h(p) = E\phi(\underline{X}) = 2p^2 + p^3 - 3p^4 + p^5.$$

(Fortsettes på side 2.)

Da er $h(0.90) = 0.9712$, $h(0.10) = 0.0207$.

(c) De minimale stimengdene er: $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$.

De minimale kuttmengdene er: $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{4, 5\}$.

Fra dette følger at den øvre grensen for h er

$$h_U(p) = 2p^3 + 2p^2$$

Da er $h_U(0.90) = 3.0780$, $h_U(0.10) = 0.0220$.

Grensen for $p = 0.9$ er selvsagt ubrukbar, mens grensen for $p = 0.1$ er meget god.

(d) Det duale system ϕ^D har de minimale kutt for ϕ som sine minimale stier. Fra en sabotørs synspunkt er det nettopp de minimale kutt som er av interesse, og systemet "virker" for sabotøren dersom ϕ^D "virker".

De minimale stier for ϕ er samtidig de minimale kutt for ϕ^D.

Siden parallellkoblinger i ϕ blir til seriekoblinger i ϕ^D og omvendt, vil et blokkdiagram for ϕ^D kunne tegnes som en parallellstruktur der den ene grenen er en parallell mellom 1 og 2 koblet i serie med 3, og den andre grenen er en serie av 4 og 5.

(e) Vi har $\phi(\underline{x}) = 1 - \phi^D(\underline{1} - \underline{x})$. Dermed vil en nedre grense for h kunne finnes ved å ta utgangspunkt i en øvre grense for $h^D(p^D)$. Siden ϕ^D har tre minimale stier av lengde 3, får vi fra ulikheten (1) i punkt (a) at

$$h^D \leq 3(p^D)^2.$$

Dermed må vi ha

$$h \geq 1 - 3(1-p)^2 = 6p - 3p^2 - 2 \equiv h_L(p)$$

Her blir $h_L(0.90) = 0.9700$, $h_L(0.10) = -1.43$.

Nå er det grensen for $p = 0.1$ som er ubrukbar, mens grensen for $p = 0.9$ er meget god.

Mønsteret er at grenser basert på minimale *stier* er gode for *lave* påliteligheter, mens grenser basert på minimale *kutt* er gode for *høye* påliteligheter.

(f) Birnbaums mål for strukturell betydning for komponent i er gitt ved

$$J_B^{(i)} = \frac{\text{ant. vektorer der } i \text{ er kritisk}}{2^{5-1}}$$

En sammenligning mellom komponenter betyr derfor en sammenligning av antall kritiske vektorer for komponentene.

Komponent 1 er kritisk hvis og bare hvis 2 virker og 3 ikke virker, og samtidig parallellsystemet 4/5 virker, dvs. hvis $x_2 = 1$ og $x_3 = 0$, mens (x_4, x_5) er enten $(1, 1)$, $(1, 0)$ eller $(0, 1)$. Dette gir 3 kritiske vektorer.

Komponent 3 er kritisk hvis og bare hvis minst én av 1 og 2 er nede, og samtidig parallellsystemet 4/5 virker, dvs. hvis (x_1, x_2) er enten $(1, 0)$,

(Fortsettes på side 3.)

$(0,1)$ eller $(0,0)$, og (x_4, x_5) er enten $(1,1)$, $(1,0)$ eller $(0,1)$. Dette gir $3 \times 3 = 9$ kombinasjoner og dermed 9 kritiske vektorer.

Komponent 4 er kritisk hvis og bare hvis 5 er nede, og samtidig systemet av 1/2/3 virker, dvs. hvis $x_5 = 0$ og (x_1, x_2, x_3) er enten $(1,1,1)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(0,0,1)$ eller $(1,1,0)$. Dette gir dermed 5 kritiske vektorer.

Det følger at $J_B^{(1)} = 3/16$, $J_B^{(3)} = 9/16$, $J_B^{(4)} = 5/16$, dvs.

$$J_B^{(3)} > J_B^{(4)} > J_B^{(1)}$$

Intuitivt: 3 er i parallell med serien av 1 og 2, mens 4 er i parallell med en enkelt komponent. Da blir 3 viktigere enn 4 siden 1/2 er "svakere" enn 5. 4 er viktigere enn 1 da den er alene i sin gren, mens 1 er sammen med 2.

Dette punktet kunne også vært løst ved å bruke uttrykket for $\phi(\underline{X})$ fra (b), ta forventning med hensyn på uavhengige komponentpåliteligheter p_i, derivere med hensyn på p_1, p_3, p_4, og i hvert uttrykk sette inn $p_i = 1/2$ for alle i.

(g) Det er kjent fra pensum at Birnbaums mål for den pålitelighetsmessige betydning av komponent 1 kan beregnes som sannsynligheten for at komponent 1 er kritisk. Fra punkt (f) finner vi at de tre kritiske vektorene for komponent 1 er gitt ved

$$(x_2, x_3, x_4, x_5) = (1,0,1,1),\ (1,0,1,0),\ (1,0,0,1)$$

Dermed er

$$I_B^{(1)} = p_2(1-p_3)p_4p_5 + p_2(1-p_3)p_4(1-p_5) + p_2(1-p_3)(1-p_4)p_5$$

Oppgave 3

(a) For et seriesystem har vi

$$\begin{aligned} P(T > t) &= P(\bigcap_{i=1}^{n} T_i > t) = \prod_{i=1}^{n} P(T_i > t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t} = e^{-(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)t} \end{aligned}$$

som er eksponensialfordelingen med hasardrate $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

(b) For assosierte variable gjelder

$$P(T > t) = P(\bigcap_{i=1}^{n} T_i > t) \geq \prod_{i=1}^{n} P(T_i > t) = e^{-(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)t}$$

Den virkelige sannsynligheten for at systemet feiler senere enn tid t er derfor *større* enn den man får ved å anta uavhengighet (forutsatt at de korrekte marginale fordelinger er brukt).

(Fortsettes på side 4.)

(c) T_i er enten T_i^* eller U_i, den som kommer først av dem, dvs. at

$$T_i = \min(T_i^*, U) \text{ for } i = 1, 2, \ldots, n$$

Siden T_i^*, U er uavhengige og eksponensialfordelte, er ifølge resultatet i (a) at T_i er eksponensialfordelt med hasardrate $\lambda_i^* + a$. Siden dette skal være lik λ_i, må vi ha $\lambda_i^* = \lambda_i - a$.

$T_1, T_2, \ldots, T_n$ er assosierte siden de er ikke-avtagende funksjoner av de uavhengige variablene $T_1^*, T_2^*, \ldots, T_n^*, U$.

(d) Det er klart at

$$\begin{aligned} T &= \min(T_1, \ldots, T_n) \\ &= \min(\min(T_1^*, U), \ldots, \min(T_n^*, U)) \\ &= \min(T_1^*, T_2^*, \ldots, T_n^*, U) \end{aligned}$$

Dermed er ifølge punkt (a), T eksponensialfordelt med hasardrate

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* + a = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - a) + a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - (n-1)a$$

, dvs.

$$\begin{aligned} P(T > t) &= e^{-(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - (n-1)a)t} \\ &= e^{-(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)t} \cdot e^{(n-1)at} > e^{-(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)t} \end{aligned}$$

der det siste uttrykket er det som ble beregnet under uavhengighet.

Altså er den virkelige påliteligheten større enn under uavhengighetsantagelsen, i tråd med konklusjonen i (b).

SLUTT