UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	STK2520 — Problemer og metoder i aktuarfag.
Eksamensdag:	Onsdag 4. desember 2013
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1. (10 poeng)

Se på følgende brannforsikringsdata til Copenhagen Reinsurance i perioden fra 06/30/1990 (dvs. 30. juni 1990) til 07/17/1990:

Dato	Krav i DKM
07/01/1990	11.849009
07/05/1990	8.683168
07/09/1990	1.410891
07/10/1990	2.985148
07/13/1990	2.062706
07/15/1990	4.057756
07/16/1990	1.115512
07/17/1990	2.062706

Brannforsikringskravene X_i i tabellen er uttrykt i millioner av danske kroner. Anta at tiden W_i mellom to krav (inter-arrival time) er beskrevet av Cramér-Lundberg-modellen.

(i) Beregn maximum-likelihood-estimatet $\widehat{\lambda}$ til hoppeintensiteten av kravtellingsprosessen $N(t)$.

(ii) Regn ut

$$P(W_1 > 4)$$

og

$$P(T_2 > 3),$$

hvor $T_2 = W_1 + W_2$ er ankomsttiden (arrival time) av kravet X_2.

(Fortsettes på side 2.)

(iii) Bruk den empiriske forventningsverdien (sample mean) til estimering av $E[X_1]$ og regn ut premien $p_{EV}(t)$ m.h.p. totalskadesummen $S(t)$ som er gitt ved

$$(1+\rho)E[S(t)],$$

hvor ρ er et påslag (safety loading) med $\rho = 0.27$ og $t = 1$ (år).

Oppgave 2. (10 poeng)

La oss se på en sammensatt livsforsikring som varer i 4 år (4−years endowment). Ved denne forsikringsformen blir det utbetalt enten summen c_{k+1} på slutten av dødsåret $k+1$ hvis $k = 1, 2, 3$ eller E på slutten av kontraktperioden, hvis $k \geq 4$. Anta at $E = 2.5$ og

k år	c_{k+1}	q_{x+k}
0	1	0.018
1	2	0.019
2	3	0.021
3	4	0.023

Som motytelse for denne garantien kreves årlige premier (annual net premiums) $\Pi_k = \Pi_0(1+0.05\cdot k)$, $k = 0, 1, 2, 3$ som innbetales ved begynnelsen av året så lenge forsikringstakeren er i live. Effektivrenten er $i = 0.03$.

(i) Regn ut Π_0.

(ii) Beregn netto-premiereservene ${}_{k+1}V$, $k = 0, 1, 2, 3$ til kontrakten.

Oppgave 3. (10 poeng)

Betrakt to porteføljer av brannforsikringskontrakter med totalskadesummer som er modellert av

$$S_i(t) = \sum_{j=1}^{N_i(t)} X_j^{(i)}, \; i = 1, 2.$$

De kravtellingsprosessene $N_1(t)$ og $N_2(t)$ er modellert av homogene Poissonprosesser med intensitet $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ og $\lambda_2 = \frac{3}{7}$, respektivt. Det antas at $N_i(t)$ er uavhengig av de *i.i.d* brannkravene $(X_j^{(i)})_{j\geq 1}$ for hvert $i = 1, 2$. Dessuten kreves det at totalskadesummene er uavhengige og at kravene i de tilsvarende porteføljene har følgende fordelinger:

$$\begin{array}{lll} P(X_j^{(1)} = 0) = 0 & P(X_j^{(1)} = 2) = \frac{2}{7} & P(X_j^{(1)} = 3) = \frac{5}{7} \\ P(X_j^{(2)} = 0) = 0 & P(X_j^{(2)} = 1) = \frac{2}{3} & P(X_j^{(2)} = 2) = \frac{1}{3} \end{array}$$

for alle $j \geq 1$. Valutaen er uttrykt i millioner av danske kroner.

Regn ut den eksakte fordelingen til den samlede totalskadesummen, dvs.

$$P(\widetilde{S}(t) \leq n),$$

(Fortsettes på side 3.)

hvor

$$\widetilde{S}(t) = S_1(t) + S_2(t)$$

for $n = 0, ..., 3$ i millioner av danske kroner og $t = 1$ (dag).

Oppgave 4. (5 poeng)

(i) Anta at dødsintensiteten (force of mortality) μ_{x+t} er gitt ved

$$\mu_{x+t} = \frac{1}{85 - t} + \frac{3}{105 - t}$$

for $0 \leq t < 85$. Regn ut ${}_{20}p_x$.

(ii) Anta at den gjenværende levetiden $T = T(x)$ er Gamma-fordelt med parametre $\alpha = 3$ og $\lambda = \frac{1}{5}$ for $x = 60$ år. Beregn $\overset{\circ}{e}_x = E[T]$.

(iii) Betrakt den gjenværende levetiden $S = T - [T]$ i dødsåret. La T være Gamma-fordelt som i Oppgave 4, (ii). Beregn forventningsverdien av S.

Oppgave 5. (5 poeng)

La kravtellingsprosessen $N(t), t \geq 0$ være beskrevet av Cramér-Lundberg-modellen. Anta at $N(t), t \geq 0$ har hoppeintensitet $\lambda^* > 0$ og anta en $i.i.d$-følge $(X_i)_{i \geq 1}$ av kravstørrelser (f.eks. brannforsikringskrav) med $X_1 \sim Exp(\lambda)$. La $X_{(j)}$ være det $j-$te minste kravet av kravene $X_1, ..., X_n$. Derfor er $X_{(1)} \leq ... \leq X_{(n)}$. Betrakt den samlede skadesummen $R(t)$ på tidspunkt t gitt ved overskudd av tap som er større enn det k-te største kravet, dvs.

$$R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} (X_{(N(t)-i+1)} - X_{(N(t)-k+1)})_+$$

for $N(t) \geq k$ og $k \geq 2$, hvor $(a)_+ \overset{def}{=} \max(a, 0)$ for $a \in \mathbb{R}$.

(i) Utled en formel for sannsynligheten

$$P(R(t) \leq x \,|N(t) \geq k)$$

for $k \geq 2$.

(ii) Beregn $P(R(t) \leq 5 \,|N(t) \geq k)$ for $k = 5$, $\lambda^* = \lambda = 1$ og $t = 10$.

Hint: Vis at $(X_{(1)}, ..., X_{(n)})$ har samme fordeling som

$$(\frac{X_n}{n}, \frac{X_n}{n} + \frac{X_{n-1}}{n-1}, ..., \frac{X_n}{n} + \frac{X_{n-1}}{n-1} + ... + \frac{X_2}{2}, \frac{X_n}{n} + \frac{X_{n-1}}{n-1} + ... + \frac{X_1}{1}).$$

Slutt

(Fortsettes på side 4.)

Vedlegg: Formelark

a) $X \sim Exp(\lambda)$ med intensitet $\lambda > 0$, hvis fordelingsfunksjonen F til X er gitt ved

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x \geq 0.$$

b) $Y \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ er Gamma-fordelt med parametre $\alpha = 1, 2, 3, ...$ og $\lambda > 0$, hvis fordelingsfunksjonen F til Y er gitt ved

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}, x \geq 0$$

med

$$E[Y] = \frac{\alpha}{\lambda} \text{ and } Var[Y] = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

c) $N \sim Pois(\lambda)$, hvis

$$P(N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, ...$$

d) Likelihood-funksjon:

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(W_i)$$

for $i.i.d$ W_i stokastiske variabler med tetthetsfunksjon f til W_1.

e)

$$_k p_x = p_x p_{x+1} \cdot ... \cdot p_{x+k-1}$$

f)

$$P(K = j) = {}_j p_x \cdot q_{x+j}$$

g) rekursjonsformel:

$$_k V + \Pi_k = v \left[c_{k+1} \cdot q_{x+k} + {}_{k+1} V \cdot p_{x+k} \right].$$

h) Panjer-formel:

$$p_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda \cdot i}{n} \cdot P(X_1 = i) \cdot p_{n-i},\ n \geq 1,$$

hvor $p_n := P(S = n)$ med begynnelsesverdi p_0

$$p_0 = \begin{cases} P(N = 0) & \text{hvis } P(X_1 = 0) = 0 \\ E[(P(X_1 = 0))^N] & \text{ellers} \end{cases}$$

(Fortsettes på side 5.)

i) mixture distribution:

$$P(Y_1 = x) = p_1 P(X_1^{(1)} = x) + p_2 P(X_1^{(2)} = x)$$

med

$$p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}, \; i = 1, 2.$$

j)

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} \log({}_t p_x)$$

k) tetthetsfunksjon av $(X_{(1)}, ..., X_{(n)})$ m.h.p. $i.i.d$ $X_1, ..., X_n$ med tetthetsfunksjon $f = f_{X_1}$:

$$f_{X_{(1)},...,X_{(n)}}(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} n! \prod_{i=1}^{n} f(x_i) & \text{hvis } x_1 < ... < x_n \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$