

Forelesning 3 STK3100

8. september 2008

S. O. Samuelsen

Plan for forelesning:

1. Generelt om lineære modeller
2. Variansanalyse - Kategoriske kovariater
3. Koding av kategoriske kovariater
4. Hat-matrise
5. Residualer

Lineær modell:

Uavhengige responser, $i = 1, \dots, n$,

$$Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$$

der

$$\mu_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip} = \beta' \mathbf{x}_i$$

der x_{ij} -ene er forklaringsvariable eller kovariater for respons nr. i og β_j -ene regresjonsparametre.

Alternativt kan vi skrive dette som

- Y_i -ene er uavhengige
- med forventning $\mu_i = \beta' \mathbf{x}_i$
- konstant varians $\text{Var}(Y_i) = \sigma^2$
- Y_i -ene er normalfordelt

Eks. Fødselsvekt mot svangerskapslengde og kjønn

Fødselsvekt Y_i , indikator for gutt x_{i1} , indikator for jente x_{i2} , svangerskapslengde x_{i3} .

Generell (apriori) modell tillater ulike vekstrater for gutter og jenter:

$$Y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} * x_{i1} + \beta_4 x_{i3} * x_{i2} + \varepsilon_i$$

Vil teste nullhypotesen $H_0 : \beta_3 = \beta_4$, dvs. samme veksthastighet, som er gitt ved modell

$$Y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i$$

Notasjon - Data

Respons for "individ" nr. i : $Y_i, i = 1, \dots, n$

$$\text{Vektor av responser } \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

x_{ij} = Forklaringsvariabel nr $j, j = 1, \dots, p$ for individ nr. i

Kovariatmatrise eller **Designmatrise** for forklaringsvariablene:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

Designmatrise for apriorimodell. fødselvakter:

$$Y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_4 x_{i4} + \beta_5 x_{i5} + \varepsilon_i \text{ der}$$

x_{i1} = indikatorvariabel for gutt,

x_{i2} = indikatorvariabel for jente,

$x_{i4} = x_{i1}x_{i3}$ = produkt av varighet og indikator gutt og

$x_{i5} = x_{i2}x_{i3}$ = produkt av varighet og indikator jente

Designmatrisen blir da, når det er nummerert slik at de første 12 individene er gutter,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_{1,3} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & 0 & x_{12,3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_{13,3} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 1 & 0 & x_{24,3} \end{bmatrix}$$

Forelesning 3 STK3100 – p. 5/44

Kvadratsum / Likelihood

På matriseform kan vi skrive $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)' = \mathbf{X}\beta$. Dermed kan kvadratsummen kan skrives

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_i)^2 = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)$$

Likelihood for Y_1, \dots, Y_n blir da

$$\begin{aligned} L(\beta) &= \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(Y_i - \mu_i)^2\right) \right] \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2}S(\beta)\right) \end{aligned}$$

Forelesning 3 STK3100 – p. 7/44

Designmatrise for nullhypotesemodell

$$Y_i = \text{fødselvikt individ nr. } i$$

x_{i1} = indikatorvariabel for gutt

x_{i2} = indikatorvariabel for jente

x_{i3} = svangerskapslengde

Nullhypotesmodellen blir da $Y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i$

Nå blir designmatrisen

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_{1,3} \\ \vdots & \vdots & \\ 1 & 0 & x_{12,3} \\ 0 & 1 & x_{13,3} \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 1 & x_{24,3} \end{bmatrix}$$

Forelesning 3 STK3100 – p. 6/44

Estimering: MK = ML

Med \mathbf{Y} vektor av responser og \mathbf{X} designmatrisen blir log-likelihood

$$l(\beta) = -\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta) + K$$

(der K ikke inneholder β) og score-ligninger

$$\frac{1}{\sigma^2}(-\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta}) = 0,$$

så MLE = MKE gis ved

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

såsant $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ er inverterbar.

Forelesning 3 STK3100 – p. 8/44

R-tilpasning fødselsvekt, begge modeller

```
> lm(vekt~factor(kjonn)+uker-1,data=fvekt)
```

Call:

```
lm(formula = vekt ~ factor(kjonn) + uker - 1, data = fvekt)
```

Coefficients:

factor(kjonn)1	factor(kjonn)2	uker
-1610.3	-1773.3	120.9

```
> x4<-uker*(kjonn==1)
```

```
> x5<-uker*(kjonn==2)
```

```
> lm(vekt~factor(kjonn)+x4+x5-1,data=fvekt)
```

Call:

```
lm(formula = vekt ~ factor(kjonn) + x4 + x5 - 1, data = fvekt)
```

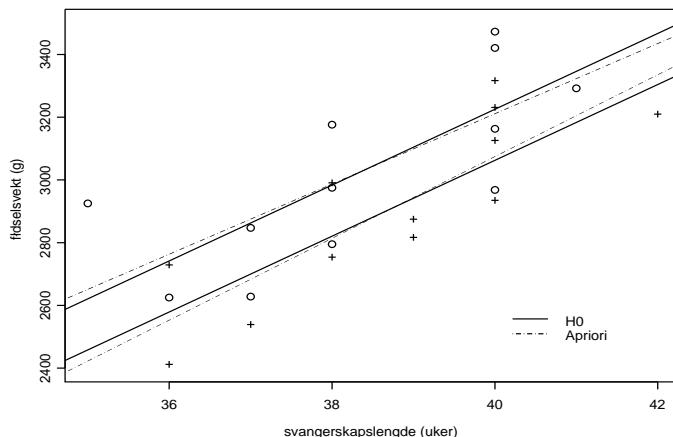
Coefficients:

factor(kjonn)1	factor(kjonn)2	x4	x5
-1268.7	-2141.7	112.0	130.4

Forelesning 3 STK3100 – p. 9/44

Forelesning 3 STK3100 – p. 11/44

Eks: Fødselsvekt



Felles (H_0) stigningskoeffisient: 120.894

Apriori 111.983 for gutter og 130.400 for jenter.

Forelesning 3 STK3100 – p. 10/44

Fordelingsegenskaper

Siden $E[\mathbf{Y}] = \mathbf{X}\beta$ fås

$$E[\hat{\beta}] = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'E[\mathbf{Y}] = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\beta = \beta,$$

dvs. forventningsrett.

Dessuten er kovarians-matrisen til \mathbf{Y} gitt som $\sigma^2 I$ der I er en $n \times n$ identitetsmatrise, dermed blir kovariansmatrisen til $\hat{\beta}$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\sigma^2 I \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

og vi har altså

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$$

eksakt siden $\hat{\beta}$ er en lineærkombinasjon av normale Y_i .

Variansen σ^2

estimeres forventningsrett ved

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}'\mathbf{x}_i)^2}{n-p} = \frac{1}{n-p}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}'\hat{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}'\hat{\beta})$$

Dessuten har vi at

$$\frac{(n-p)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-p},$$

igjen et eksakt resultat når Y_i -ene er normalfordelt.

Forelesning 3 STK3100 – p. 12/44

Likelihood Ratio Test (LRT)

Anta at Mod_0 er et spesialtilfelle av Mod_1 og at vi vil teste nullhypotesen

$$H_0 : \text{Mod}_0 \text{ er sann}$$

under antagelse på forhånd (apriori) av at Mod_1 . LRT består da i å forkaste hvis $\Delta = 2(\hat{l} - l^*)$ er stor der \hat{l} og l^* er maksimal loglikelihood under hhv. Mod_1 og Mod_0 . Vi har da tilnærmet under H_0 at

$$\Delta = 2(\hat{l} - l^*) \sim \chi_q^2$$

når q antall færre parametre i Mod_0 .

Forelesning 3 STK3100 – p. 13/44

LRT og lineærnormale modeller

Anta at Mod_0 gis ved $H_0 : \beta_{p-q+1} = \dots = \beta_p = 0$ samt at σ^2 er kjent. La dessuten $\hat{\beta}$ og β^* være MLE/MKE under hhv. apriorispesifikasjon og H_0 slik at

$$\beta_{p-q+1}^* = \dots = \beta_p^* = 0$$

Da blir

$$\Delta = 2(\hat{l} - l^*) = \frac{S(\beta^*) - S(\hat{\beta})}{\sigma^2}.$$

For lineærnormale modeller holder dessuten $\Delta \sim \chi_q^2$ eksakt.

Forelesning 3 STK3100 – p. 14/44

F-test og LRT

Dessuten er $\Delta = \frac{S(\beta^*) - S(\hat{\beta})}{\sigma^2}$ og $\hat{\sigma}^2$ uavhengige, dermed får vi at eksakt

$$F = \frac{[S(\beta^*) - S(\hat{\beta})]/q}{\hat{\sigma}^2} \sim F_{q, n-p}$$

dvs. Fisher-fordelt med q og $n - p$ frihetsgrader under $H_0 : \beta_{p-q+1} = \dots = \beta_p = 0$ når Y_i -ene er normale.

Dette resultatet kan brukes til å teste f.eks. ingen effekt av en kovariat x som inngår i modellen både med leddet x og x^2 .

Men mer typisk brukes det til å teste om det er en effekt av en kategorisk kovariat.

Forelesning 3 STK3100 – p. 15/44

En noe mer generell nullhypotese, de J & H

La C være en $q \times p$ matrise. Vi kan mer generelt være interessert i å teste

$$H_0 : C\beta = 0$$

Spesielt får vi testen presentert foran ved å sette

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Vi antar at rangen til C er lik $q (< p)$.

Forelesning 3 STK3100 – p. 16/44

En noe mer generell F-test, de J & H

La som før X være designmatrisen og $\hat{\beta}$ parameterestimat for apriorimodellen, X^* og β^* er designmatrise og parameterestimater under nullhypotesen. Vi kan skrive kvadratsummen

$$\begin{aligned} S(\hat{\beta}) &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\mathbf{X}\hat{\beta} - \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} \\ &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} \end{aligned}$$

siden $\hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} = \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}$.

Tilsvarende fås for nullhypotesemodellen

$S(\beta^*) = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \beta^{*'}\mathbf{X}^{*'}\mathbf{Y}$ der \mathbf{X}^* er designmatrisen generert av $\mathbf{C}\beta = 0$. Dermed blir F-observatoren

$$F = \frac{(S(\beta^*) - S(\hat{\beta}))/q}{\hat{\sigma}^2} = \frac{(\hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - \beta^{*'}\mathbf{X}^{*'}\mathbf{Y})/q}{\hat{\sigma}^2} \sim F_{q,n-p}$$

Forelesning 3 STK3100 – p. 17/44

F-test for ulik vekst hastighet mellom kjønn

```
> mod0<-lm(vekt~factor(kjonn)+uker-1,data=fvekt)
> mod1<-lm(vekt~factor(kjonn)+x4+x5-1,data=fvekt)
> anova(mod0,mod1)
Analysis of Variance Table

Model 1: vekt ~ factor(kjonn) + uker - 1
Model 2: vekt ~ factor(kjonn) + x4 + x5 - 1
  Res.Df   RSS Df Sum of Sq    F Pr(>F)
1      21 658771
2      20 652425  1     6346 0.1945 0.6639
```

Siden $n = 24$, $p = 4$ og $q = 1$ blir

$$F = \frac{(658770.8 - 652424.5)/1}{652424.5/20} = 0.19$$

Ikke-signifikante relativt til F-fordeling, $p=0.66$.

Noen ganger inndeles lineære modeller i

1. Multippel lineær regresjon

- Kun "skala"-kovariater

2. Variansanalyse - ANOVA

- Kun kategoriske covariater

3. Kovariansanalyse

- Både kategoriske covariater og skala-covariater

Denne inndelingen er imidlertid ikke så vanlig innen GLM-rammen, vi har typisk både skala- og kategoriske covariater, og snakker uansett om multippel regresjon.

Forelesning 3 STK3100 – p. 19/44

Eks: Kategoriske "kovariater"

Y = Inntekt etter kjønn og sosioøkonomisk gruppe:

	Sted 1	Sted 2	Sted 3
Mann	300 350 370 360	400 370 420 390	400 430 420 410
Kvinne	300 320 310 305	350 370 340 355	370 380 360 365

Altså to kategoriske covariater = faktorer i R-terminologi:

1. Kjønn med 2 nivåer
2. Sted med 3 nivåer

Parametrisering med enveis variansanalyse

Sammenligning av forventning mellom J grupper:

Modell: Anta at individ i er i gruppe j . Da er $Y_i \sim N(\mu_j, \sigma^2)$ La for $j = 1, \dots, J$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } i \text{ er i gruppe } j \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Da kan vi skrive dette som en lineær modell uten konstantledd

$$\mu_j = E[Y_i] = \mu_1 x_{i1} + \mu_2 x_{i2} + \dots + \mu_J x_{iJ}$$

Denne parametriseringen er imidlertid kan imidlertid ikke benyttes med flere kategoriske kovariater (for flere kovariater samtidig).

Forelesning 3 STK3100 – p. 21/44

Eks: Designmatrise for Sted uten konstantledd

	<code>enveisfit\$X</code>	<code>factor(sted)1</code>	<code>factor(sted)2</code>	<code>factor(sted)3</code>
1		1	0	0
2		1	0	0
3		1	0	0
4		1	0	0
5		0	1	0
6		0	1	0
7		0	1	0
8		0	1	0
9		0	0	1
10		0	0	1
11		0	0	1
12		0	0	1
13		1	0	0
14		1	0	0
15		1	0	0
16		1	0	0
17		0	1	0
18		0	1	0
19		0	1	0

Forelesning 3 STK3100 – p. 23/44

Eks: Inntekt over sted

Ser bort fra kjønn. Kun en faktor og altså enveis ANOVA.

```
> inntekt<-c(300,350,370,360,400,370,420,390,400,430,420,410,300,320,310
> kjonn<-c(rep(1,12),rep(2,12))
> sted<-rep(c(1,1,1,1,2,2,2,2,3,3,3,3),2)

> lm(inntekt~factor(sted)-1)
```

Coefficients:

<code>factor(sted)1</code>	<code>factor(sted)2</code>	<code>factor(sted)3</code>
326.9	374.4	391.9

```
> summary(lm(inntekt~factor(sted)-1))
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
<code>factor(sted)1</code>	326.875	9.733	33.58	<2e-16 ***
<code>factor(sted)2</code>	374.375	9.733	38.46	<2e-16 ***
<code>factor(sted)3</code>	391.875	9.733	40.26	<2e-16 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Forelesning 3 STK3100 – p. 22/44

Hjørnepunkt-parametrisering = "treatment-kontrast"

Vi kan velge en av gruppene som referansegruppe, f.eks. gruppe 1 og skrive om enveis ANOVA til

$$\begin{aligned}\mu_j = E[Y_i] &= \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)x_{i2} + \dots + (\mu_J - \mu_1)x_{iJ} \\ &= \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_J x_{iJ}\end{aligned}$$

der altså $\beta_1 = \mu_1$ og $\beta_j = \mu_j - \mu_1$ for $j > 1$.

Denne parametriseringen er naturlig hvis man vil sammenligne $J - 1$ nye behandlinger med en tradisjonell behandling.

Hjørnepunkt-parametrisering / treatment-contrast er default i R.

Forelesning 3 STK3100 – p. 24/44

Eksempel inntekt med hjørnepunkt-parametrisering

```
> summary(lm(inntekt~factor(sted)))

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept) 326.875     9.733   33.583 < 2e-16 ***
factor(sted)2 47.500    13.765   3.451  0.002394 ** 
factor(sted)3 65.000    13.765   4.722  0.000116 *** 
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 27.53 on 21 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.5321,    Adjusted R-squared: 0.4875 
F-statistic: 11.94 on 2 and 21 DF,  p-value: 0.000344

> anova(lm(inntekt~factor(sted)))
Analysis of Variance Table

Response: inntekt
           Df  Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)    
factor(sted) 2 18100.0 9050.0 11.941 0.000344 ***
Residuals   21 15915.6  757.9                   

Forelesning 3 STK3100 - p. 25/44
```

Sum-parametrisering (kontrast)

Tradisjonelt i ANOVA benyttes imidlertid ofte "sum-parametrisering" med

$$\mu_j = E[Y_i] = \alpha_0 + \alpha_1 x_{i1} + \alpha_2 x_{i2} + \cdots + \alpha_J x_{iJ}$$

der

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_J = 0$$

Merk at $\sum_{j=1}^J x_{ij} = 1$ og med konstantledd α_0 i modellen er det overparametrisert uten en restriksjonen som $\sum_{j=1}^J \alpha_j = 0$

Med sum-parametrisering blir $\alpha_J = -(\alpha_1 + \cdots + \alpha_{J-1})$ og

$$\begin{aligned}\mu_j &= \alpha_0 + \alpha_1 x_{i1} + \cdots + \alpha_{J-1} x_{i,J-1} - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{J-1}) x_{iJ} \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 (x_{i1} - x_{iJ}) + \cdots + \alpha_{J-1} (x_{i,J-1} - x_{iJ}) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 x'_{i1} + \cdots + \alpha_{J-1} x'_{i,J-1}\end{aligned}$$

Forelesning 3 STK3100 - p. 27/44

Eks: Designmatrise for Sted med treatment-kontrast

```
> enveisfit<-lm(inntekt~factor(sted),x=T)
> enveisfit$x
  (Intercept) factor(sted)2 factor(sted)3
1             1             0             0
2             1             0             0
3             1             0             0
4             1             0             0
5             1             1             0
6             1             1             0
7             1             1             0
8             1             1             0
9             1             0             1
10            1             0             1
11            1             0             1
12            1             0             1
13            1             0             0
14            1             0             0
15            1             0             0
16            1             0             0
17            1             1             0
18            1             1             0
19            1             1             0

Forelesning 3 STK3100 - p. 26/44
```

Sum-parametrisering (kontrast), forts.

Sum-parametriseringen gir altså J parametre i - på samme måte som hjørnepunkt-parametrisering - men med kovariater

$$x'_{ij} = x_{ij} - x_{iJ}$$

Sum-kontrast spesifiseres i R ved

```
options(contrasts=c("contr.sum", "contr.poly"))
```

Se bare bort fra "contr.poly" som benyttes for en spesiell type kategorisk kovariat.

For å komme tilbake til hjørnepunk/treatment-parametrisering:

```
options(contrasts=c("contr.treatment", "contr.poly"))
```

Forelesning 3 STK3100 - p. 28/44

Eks: Inntekt over sted med sum-kontrast

```
> options(contrasts=c("contr.sum","contr.poly"))
> summary(lm(inntekt~factor(sted)))

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 364.375     5.619   64.841 < 2e-16 ***
factor(sted)1 -37.500    7.947  -4.719 0.000117 ***
factor(sted)2  10.000    7.947   1.258 0.222090
---
Residual standard error: 27.53 on 21 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.5321,      Adjusted R-squared: 0.4875
F-statistic: 11.94 on 2 and 21 DF,  p-value: 0.000344

> anova(lm(inntekt~factor(sted)))
Analysis of Variance Table

Response: inntekt
          Df  Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
factor(sted) 2 18100.0 9050.0 11.941 0.000344 ***
Residuals   21 15915.6  757.9
---
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' , Foglesping 3 STK3100 - p. 29/44
```

Toveis variansanalyse uten interaksjon

$Y_i \sim N(E[Y_i], \sigma^2)$ uavhengige med

- nivå j på faktor 1 med ialt J nivåer
- nivå k på faktor 2 med ialt K nivåer

Med hjørnepunkt-parametrisering kodes 1. faktor ved $x_{ij} = 1$ mens $x_{ij'} = 0$ og 2. faktor ved $z_{ik} = 1$ mens $z_{ik'} = 0$ slik at forventningen blir (med $\beta_1 = \alpha_1 = 0$)

$$E[Y_i] = \beta_0 + \sum_{j=2}^J \beta_j x_{ij} + \sum_{k=2}^K \alpha_k z_{ik} = \beta_0 + \beta_j + \alpha_k$$

Foglesping 3 STK3100 - p. 31/44

Eks: Designmatrise for Sted uten sum-kontrast

```
> options(contrasts=c("contr.sum","contr.poly"))
> enveisfit<-lm(inntekt~factor(sted),x=T)
> enveisfit$x
   (Intercept) factor(sted)1 factor(sted)2
1             1             1             0
2             1             1             0
3             1             1             0
4             1             1             0
5             1             0             1
6             1             0             1
7             1             0             1
8             1             0             1
9             1            -1            -1
10            1            -1            -1
11            1            -1            -1
12            1            -1            -1
13            1             1             0
14            1             1             0
15            1             1             0
16            1             1             0
17            1             0             1
18            1             0             1
19            1             0             1
20            1             0             1
21            1             0             1
22            1             0             1
23            1             0             1
24            1             0             1
25            1             0             1
26            1             0             1
27            1             0             1
28            1             0             1
29            1             0             1
30            1             0             1
31            1             0             1
32            1             0             1
33            1             0             1
34            1             0             1
35            1             0             1
36            1             0             1
37            1             0             1
38            1             0             1
39            1             0             1
40            1             0             1
41            1             0             1
42            1             0             1
43            1             0             1
44            1             0             1
45            1             0             1
46            1             0             1
47            1             0             1
48            1             0             1
49            1             0             1
50            1             0             1
51            1             0             1
52            1             0             1
53            1             0             1
54            1             0             1
55            1             0             1
56            1             0             1
57            1             0             1
58            1             0             1
59            1             0             1
60            1             0             1
61            1             0             1
62            1             0             1
63            1             0             1
64            1             0             1
65            1             0             1
66            1             0             1
67            1             0             1
68            1             0             1
69            1             0             1
70            1             0             1
71            1             0             1
72            1             0             1
73            1             0             1
74            1             0             1
75            1             0             1
76            1             0             1
77            1             0             1
78            1             0             1
79            1             0             1
80            1             0             1
81            1             0             1
82            1             0             1
83            1             0             1
84            1             0             1
85            1             0             1
86            1             0             1
87            1             0             1
88            1             0             1
89            1             0             1
90            1             0             1
91            1             0             1
92            1             0             1
93            1             0             1
94            1             0             1
95            1             0             1
96            1             0             1
97            1             0             1
98            1             0             1
99            1             0             1
100           1             0             1
101           1             0             1
102           1             0             1
103           1             0             1
104           1             0             1
105           1             0             1
106           1             0             1
107           1             0             1
108           1             0             1
109           1             0             1
110           1             0             1
111           1             0             1
112           1             0             1
113           1             0             1
114           1             0             1
115           1             0             1
116           1             0             1
117           1             0             1
118           1             0             1
119           1             0             1
120           1             0             1
121           1             0             1
122           1             0             1
123           1             0             1
124           1             0             1
125           1             0             1
126           1             0             1
127           1             0             1
128           1             0             1
129           1             0             1
130           1             0             1
131           1             0             1
132           1             0             1
133           1             0             1
134           1             0             1
135           1             0             1
136           1             0             1
137           1             0             1
138           1             0             1
139           1             0             1
140           1             0             1
141           1             0             1
142           1             0             1
143           1             0             1
144           1             0             1
145           1             0             1
146           1             0             1
147           1             0             1
148           1             0             1
149           1             0             1
150           1             0             1
151           1             0             1
152           1             0             1
153           1             0             1
154           1             0             1
155           1             0             1
156           1             0             1
157           1             0             1
158           1             0             1
159           1             0             1
160           1             0             1
161           1             0             1
162           1             0             1
163           1             0             1
164           1             0             1
165           1             0             1
166           1             0             1
167           1             0             1
168           1             0             1
169           1             0             1
170           1             0             1
171           1             0             1
172           1             0             1
173           1             0             1
174           1             0             1
175           1             0             1
176           1             0             1
177           1             0             1
178           1             0             1
179           1             0             1
180           1             0             1
181           1             0             1
182           1             0             1
183           1             0             1
184           1             0             1
185           1             0             1
186           1             0             1
187           1             0             1
188           1             0             1
189           1             0             1
190           1             0             1
191           1             0             1
192           1             0             1
193           1             0             1
194           1             0             1
195           1             0             1
196           1             0             1
197           1             0             1
198           1             0             1
199           1             0             1
200           1             0             1
201           1             0             1
202           1             0             1
203           1             0             1
204           1             0             1
205           1             0             1
206           1             0             1
207           1             0             1
208           1             0             1
209           1             0             1
210           1             0             1
211           1             0             1
212           1             0             1
213           1             0             1
214           1             0             1
215           1             0             1
216           1             0             1
217           1             0             1
218           1             0             1
219           1             0             1
220           1             0             1
221           1             0             1
222           1             0             1
223           1             0             1
224           1             0             1
225           1             0             1
226           1             0             1
227           1             0             1
228           1             0             1
229           1             0             1
230           1             0             1
231           1             0             1
232           1             0             1
233           1             0             1
234           1             0             1
235           1             0             1
236           1             0             1
237           1             0             1
238           1             0             1
239           1             0             1
240           1             0             1
241           1             0             1
242           1             0             1
243           1             0             1
244           1             0             1
245           1             0             1
246           1             0             1
247           1             0             1
248           1             0             1
249           1             0             1
250           1             0             1
251           1             0             1
252           1             0             1
253           1             0             1
254           1             0             1
255           1             0             1
256           1             0             1
257           1             0             1
258           1             0             1
259           1             0             1
260           1             0             1
261           1             0             1
262           1             0             1
263           1             0             1
264           1             0             1
265           1             0             1
266           1             0             1
267           1             0             1
268           1             0             1
269           1             0             1
270           1             0             1
271           1             0             1
272           1             0             1
273           1             0             1
274           1             0             1
275           1             0             1
276           1             0             1
277           1             0             1
278           1             0             1
279           1             0             1
280           1             0             1
281           1             0             1
282           1             0             1
283           1             0             1
284           1             0             1
285           1             0             1
286           1             0             1
287           1             0             1
288           1             0             1
289           1             0             1
290           1             0             1
291           1             0             1
292           1             0             1
293           1             0             1
294           1             0             1
295           1             0             1
296           1             0             1
297           1             0             1
298           1             0             1
299           1             0             1
300           1             0             1
301           1             0             1
302           1             0             1
303           1             0             1
304           1             0             1
305           1             0             1
306           1             0             1
307           1             0             1
308           1             0             1
309           1             0             1
310           1             0             1
311           1             0             1
312           1             0             1
313           1             0             1
314           1             0             1
315           1             0             1
316           1             0             1
317           1             0             1
318           1             0             1
319           1             0             1
320           1             0             1
321           1             0             1
322           1             0             1
323           1             0             1
324           1             0             1
325           1             0             1
326           1             0             1
327           1             0             1
328           1             0             1
329           1             0             1
330           1             0             1
331           1             0             1
332           1             0             1
333           1             0             1
334           1             0             1
335           1             0             1
336           1             0             1
337           1             0             1
338           1             0             1
339           1             0             1
340           1             0             1
341           1             0             1
342           1             0             1
343           1             0             1
344           1             0             1
345           1             0             1
346           1             0             1
347           1             0             1
348           1             0             1
349           1             0             1
350           1             0             1
351           1             0             1
352           1             0             1
353           1             0             1
354           1             0             1
355           1             0             1
356           1             0             1
357           1             0             1
358           1             0             1
359           1             0             1
360           1             0             1
361           1             0             1
362           1             0             1
363           1             0             1
364           1             0             1
365           1             0             1
366           1             0             1
367           1             0             1
368           1             0             1
369           1             0             1
370           1             0             1
371           1             0             1
372           1             0             1
373           1             0             1
374           1             0             1
375           1             0             1
376           1             0             1
377           1             0             1
378           1             0             1
379           1             0             1
380           1             0             1
381           1             0             1
382           1             0             1
383           1             0             1
384           1             0             1
385           1             0             1
386           1             0             1
387           1             0             1
388           1             0             1
389           1             0             1
390           1             0             1
391           1             0             1
392           1             0             1
393           1             0             1
394           1             0             1
395           1             0             1
396           1             0             1
397           1             0             1
398           1             0             1
399           1             0             1
400           1             0             1
401           1             0             1
402           1             0             1
403           1             0             1
404           1             0             1
405           1             0             1
406           1             0             1
407           1             0             1
408           1             0             1
409           1             0             1
410           1             0             1
411           1             0             1
412           1             0             1
413           1             0             1
414           1             0             1
415           1             0             1
416           1             0             1
417           1             0             1
418           1             0             1
419           1             0             1
420           1             0             1
421           1             0             1
422           1             0             1
423           1             0             1
424           1             0             1
425           1             0             1
426           1             0             1
427           1             0             1
428           1             0             1
429           1             0             1
430           1             0             1
431           1             0             1
432           1             0             1
433           1             0             1
434           1             0             1
435           1             0             1
436           1             0             1
437           1             0             1
438           1             0             1
439           1             0             1
440           1             0             1
441           1             0             1
442           1             0             1
443           1             0             1
444           1             0             1
445           1             0             1
446           1             0             1
447           1             0             1
448           1             0             1
449           1             0             1
450           1             0             1
451           1             0             1
452           1             0             1
453           1             0             1
454           1             0             1
455           1             0             1
456           1             0             1
457           1             0             1
458           1             0             1
459           1             0             1
460           1             0             1
461           1             0             1
462           1             0             1
463           1             0             1
464           1             0             1
465           1             0             1
466           1             0             1
467           1             0             1
468           1             0             1
469           1             0             1
470           1             0             1
471           1             0             1
472           1             0             1
473           1             0             1
474           1             0             1
475           1             0             1
476           1             0             1
477           1             0             1
478           1             0             1
479           1             0             1
480           1             0             1
481           1             0             1
482           1             0             1
483           1             0             1
484           1             0             1
485           1             0             1
486           1             0             1
487           1             0             1
488           1             0             1
489           1             0             1
490           1             0             1
491           1             0             1
492           1             0             1
493           1             0             1
494           1             0             1
495           1             0             1
496           1             0             1
497           1             0             1
498           1             0             1
499           1             0             1
500           1             0             1
501           1             0             1
502           1             0             1
503           1             0             1
504           1             0             1
505           1             0             1
506           1             0             1
507           1             0             1
508           1             0             1
509           1             0             1
510           1             0             1
511           1             0             1
512           1             0             1
513           1             0             1
514           1             0             1
515           1             0             1
516           1             0             1
517           1             0             1
518           1             0             1
519           1             0             1
520           1             0             1
521           1             0             1
522           1             0             1
523           1             0             1
524           1             0             1
525           1             0             1
526           1             0             1
527           1             0             1
528           1             0             1
529           1             0             1
530           1             0             1
531           1             0             1
532           1             0             1
533           1             0             1
534           1             0             1
535           1             0             1
536           1             0             1
537           1             0             1
538           1             0             1
539           1             0             1
540           1             0             1
541           1             0             1
542           1             0             1
543           1             0             1
544           1             0             1
545           1             0             1
546           1             0             1
547           1             0             1
548           1             0             1
549           1             0             1
550           1             0             1
551           1             0             1
552           1             0             1
553           1             0             1
554           1             0             1
555           1             0             1
556           1             0             1
557           1             0             1
558           1             0             1
559           1             0             1
560           1             0             1
561           1             0             1
562           1             0             1
563           1             0             1
564           1             0             1
565           1             0             1
566           1             0             1
567           1             0             1
568           1             0             1
569           1             0             1
570           1             0             1
571           1             0             1
572           1             0             1
573           1             0             1
574           1             0             1
575           1             0             1
576           1             0             1
577           1             0             1
578           1             0             1
579           1             0             1
580           1             0             1
581           1             0             1
582           1             0             1
583           1             0             1
584           1             0             1
585           1             0             1
586           1             0             1
587           1             0             1
588           1             0             1
589           1             0             1
590           1             0             1
591           1             0             1
592           1             0             1
593           1             0             1
594           1             0             1
595           1             0             1
596           1             0             1
597           1             0             1
598           1             0             1
599           1             0             1
600           1             0             1
601           1             0             1
602           1             0             1
603           1             0             1
604           1             0             1
605           1             0             1
606           1             0             1
607           1             0             1
608           1             0             1
609           1             0             1
610           1             0             1
611           1             0             1
612           1             0             1
613           1             0             1
614           1             0             1
615           1             0             1
616           1             0             1
617           1             0             1
618           1             0             1
619           1             0             1
620           1             0             1
621           1             0             1
622           1             0             1
623           1             0             1
624           1             0             1
625           1             0             1
626           1             0             1
627           1             0             1
628           1             0             1
629           1             0             1
630           1             0             1
631           1             0             1
632           1             0             1
633           1             0             1
634           1             0             1
635           1             0             1
636           1             0             1
637           1             0             1
638           1             0             1
639           1             0             1
640           1             0             1
641           1             0             1
642           1             0             1
643           1             0             1
644           1             0             1
645           1             0             1
646           1             0             1
647           1             0             1
648           1             0             1
649           1             0             1
650           1             0             1
651           1             0             1
652           1             0             1
653           1             0             1
654           1             0             1
655           1             0             1
656           1             0             1
657           1             0             1
658           1             0             1
659           1             0             1
660           1             0             1
661           1             0             1
662           1             0             1
663           1             0             1
664           1             0             1
665           1             0             1
666           1             0             1
667           1             0             1
668           1             0             1
669           1             0             1
670           1             0             1
671           1             0             1
672           1             0             1
673           1             0             1
674           1             0             1
675           1             0             1
676           1             0             1
677           1             0             1
678           1             0             1
679           1             0             1
680           1             0             1
681           1             0             1
682           1             0             1
683           1             0             1
684           1             0             1
685           1             0             1
686           1             0             1
687           1             0             1
688           1             0             1
689           1             0             1
690           1             0             1
691           1             0             1
692           1             0             1
693           1             0             1
694           1             0             1
695           1             0             1
696           1             0             1
697           1             0             1
698           1             0             1
699           1             0             1
700           1             0             1
701           1             0             1
702           1             0             1
703           1             0             1
704           1             0             1
705           1             0             1
706           1             0             1
707           1             0             1
708           1             0             1
709           1             0             1
710           1             0             1
711           1             0             1
712           1             0             1
713           1             0             1
714           1             0             1
715           1             0             1
716           1             0             1
717           1             0             1
718           1             0             1
719           1             0             1
720           1             0             1
721           1             0             1
722           1             0             1
723           1             0             1
724           1             0             1
725           1             0             1
726           1             0             1
727           1             0             1
728           1             0             1
729           1             0             1
730           1             0             1
731           1             0             1
732           1             0             1
733           1             0             1
734           1             0             1
735           1             0             1
736           1             0             1
737           1             0             1
738           1             0             1
739           1             0             1
740           1             0             1
741           1             0             1
742           1             0             1
743           1             0             1
744           1             0             1
745           1             0             1
746           1             0             1
747           1             0             1
748           1             0             1
749           1             0             1
750           1             0             1
751           1             0             1
752           1             0             1
753           1             0             1
754           1             0             1
755           1             0             1
756           1             0             1
757           1             0             1
758           1             0             1
759           1             0             1
760           1             0             1
761           1             0             1
762           1             0             1
763           1             0             1
764           1             0             1
765           1             0             1
766           1             0             1
767           1             0             1
768           1             0             1
769           1             0             1
770           1             0             1
771           1             0             1
772           1             0             1
773           1             0             1
774           1             0             1
775           1             0             1
776           1             0             1
777           1             0             1
778           1             0             1
779           1             0             1
780           1             0             1
781           1             0             1
782           1             0             1
783           1             0             1
784           1             0             1
785           1             0             1
786           1             0             1
787           1             0             1
788           1             0             1
789           1             0             1
790           1             0             1
791           1             0             1
792           1             0             1
793           1             0             1
794           1             0             1
795
```

Toveis ANOVA uten interaksjon med sum-kontrast

$Y_i \sim N(E[Y_i], \sigma^2)$ uavhengige med

- nivå j på faktor 1 med ialt J nivåer
- nivå k på faktor 2 med ialt K nivåer

Med x_{ij} og z_{ik} som ved hjørnepunkt-parametrisering kodes nå 1. faktor ved $x'_{ij} = x_{ij} - x_{iJ}$ og 2. faktor ved $z'_{ik} = z_{ik} - z_{iK}$

Forelesning 3 STK3100 – p. 33/44

Toveis anova med interaksjon

$Y_i \sim N(E[Y_i], \sigma^2)$ uavhengige med

- nivå j på faktor 1 med ialt J nivåer
- nivå k på faktor 2 med ialt K nivåer

og

$$E[Y_i] = \alpha_0 + \beta_j + \gamma_k + (\beta\gamma)_{jk},$$

dvs. et nivå for hver kombinasjon nivå j på faktor 1 og nivå k på faktor 2.

Forelesning 3 STK3100 – p. 35/44

Eks: Toveis-anova med sum-parametrisering

```
> options(contrasts=c("contr.sum", "contr.poly"))
> toveisfit<-lm(innnett~factor(sted)+factor(kjonn),x=T)
> summary(toveisfit)

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 364.375    3.448 105.680 < 2e-16 ***
factor(sted)1 -37.500    4.876 -7.691 2.13e-07 ***
factor(sted)2  10.000    4.876  2.051   0.0536 .
factor(kjonn)1 20.625    3.448  5.982 7.54e-06 ***
---
Residual standard error: 16.89 on 20 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.8322,      Adjusted R-squared: 0.8071
F-statistic: 33.07 on 3 and 20 DF,  p-value: 6.012e-08

> anova(toveisfit)
Analysis of Variance Table
Response: innnett
          Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
factor(sted) 2 18100.0 9050.0 29.0569 2.314e-06 ***
factor(kjonn) 1 10209.4 10209.4 32.7793 1.988e-05 ***
factor(sted):factor(kjonn) 2   100.0   50.0  0.1605   0.8529
Residuals    18  5606.2   311.5
---
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Forelesning 3 STK3100 – p. 34/44

Eks: Toveis-anova med sum-parametrisering

```
> toveisfit<-lm(innnett~factor(sted)+factor(kjonn)
+factor(sted)*factor(kjonn))

> anova(toveisfit)
Analysis of Variance Table
Response: innnett
          Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
factor(sted) 2 18100.0 9050.0 29.0569 2.314e-06 ***
factor(kjonn) 1 10209.4 10209.4 32.7793 1.988e-05 ***
factor(sted):factor(kjonn) 2   100.0   50.0  0.1605   0.8529
Residuals    18  5606.2   311.5
---
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Forelesning 3 STK3100 – p. 36/44

Predikerte verdier og Hat-matrisen

Med estimator MKE $\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ får vi predikerte verdier for μ_i og for Y_i ved

$$\hat{\mu}_i = \hat{Y}_i = \hat{\beta}' \mathbf{x}_i$$

For vektoren $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)'$ blir disse gitt ved

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\hat{\beta} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{Y}$$

der

$$\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$$

kalles Hat-matrisen fordi den "setter hatt på" \mathbf{Y} .

Forelesning 3 STK3100 – p. 37/44

Forelesning 3 STK3100 – p. 39/44

Residualer på matriseform

La $\hat{e}_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \hat{\mu}_i$ være de vanlige residualene og $\hat{\mathbf{e}} = (\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)'$ vektoren av residualer. Da finner vi

$$\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{I}\mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{Y} = (\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{Y} = \mathbf{M}\mathbf{Y}$$

der \mathbf{I} er $n \times n$ identitetsmatrisen og $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{H}$.

Siden $\hat{\mathbf{e}}$ er lineært avhengig av \mathbf{Y} er de normalfordelt med forventning

$$E[\hat{\mathbf{e}}] = \mathbf{M}E[\mathbf{Y}] = (\mathbf{I} - \mathbf{H})E[\mathbf{Y}] = (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{X}\beta = \mathbf{0}$$

og kovariansmatrise

$$\mathbf{M}\sigma^2\mathbf{I}\mathbf{M}' = \sigma^2\mathbf{M} = \sigma^2(\mathbf{I} - \mathbf{H})$$

hvor første likhet vises på neste side.

Forelesning 3 STK3100 – p. 38/44

H og M idempotent og symmetriske

For en symmetrisk matrise A er $A = A'$

En *idempotent* matrise A tilfredstiller $A^2 = AA = A$.

Resultat: \mathbf{H} og \mathbf{M} er symmetriske og idempotente.

Viser at \mathbf{H} er idempotent:

$$\mathbf{HH} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' = \mathbf{H}$$

Siden dette også gjelder for \mathbf{M} (oppgave!) får vi

$$\mathbf{M}\sigma^2\mathbf{I}\mathbf{M}' = \sigma^2\mathbf{MM} = \sigma^2\mathbf{M} = \sigma^2(\mathbf{I} - \mathbf{H})$$

Studentiserte residualer og "leverage"

Med $\mathbf{H} = [h_{ij}]_{i,j=1}^n$ får vi at standardavviket til residualen \hat{e}_i er lik $\sigma\sqrt{1 - h_{ii}}$, dvs. avhenger av h_{ii} .

Dette foreslår at vi bør se på Studentiserte residualer

$$r_i = \frac{\hat{e}_i}{\hat{\sigma}\sqrt{1 - h_{ii}}}$$

heller enn $\hat{e}_i = Y_i - \hat{Y}_i$.

Størrelsene h_{ii} kalles "leverage" = "moment på vektstang" og angir evnen til å påvirke $\hat{\beta}$: Influens.

Oppgave: Vis at for enkel lineær regresjon, $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, blir leverage

$$h_{ii} = \frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Forelesning 3 STK3100 – p. 40/44

Delta-Betas og Cook's distanse

Observasjoner Y_i, x_i som har stor innflytelse på $\hat{\beta}$ kan også observeres ved såkalte Delta-Betas (eller noen ganger df-betas)

$$\Delta_i \hat{\beta}_j = \hat{\beta}_j - \hat{\beta}_{j(i)}$$

der $\hat{\beta}_{j(i)}$ er MKE for β_j observasjon utelates fra estimeringen.

Utfra uttrykk som leverage og influens kan man vel vente at det er en sammenheng mellom $\Delta_i \hat{\beta}_j$ og leverages h_{ii} . Denne kan uttrykkes som gjennom *Cook's avstand*

$$D_i = \frac{1}{p} \frac{h_{ii}}{1 - h_{ii}} r_i^2 = \frac{1}{p \hat{\sigma}^2} (\hat{\beta} - \hat{\beta}_{(i)})' \mathbf{X}' \mathbf{X} (\hat{\beta} - \hat{\beta}_{(i)})$$

der $\hat{\beta}_{(i)} = (\hat{\beta}_{1(i)}, \dots, \hat{\beta}_{p(i)})'$.

Forelesning 3 STK3100 – p. 41/44

Delta-Betas og Cook's distanse, forts.

Man ser av denne ligningen at estimatene påvirkes betydelig dersom

- Studentisert residual r_i er stor
- Leverage h_{ii} er stor

Som en tommelfingerregel bør verdier sjekkes

- hvis $D_i > 0.5$
- alltid hvis $D_i > 1$

(Cook & Weisberg, 1999, Applied Regression Including Computing and Graphics).

Forelesning 3 STK3100 – p. 42/44

Delta-Betas og Cook's distanse, forts. II

En intuitiv begrunnelse for disse kriteriene fås ved å legge merke til at

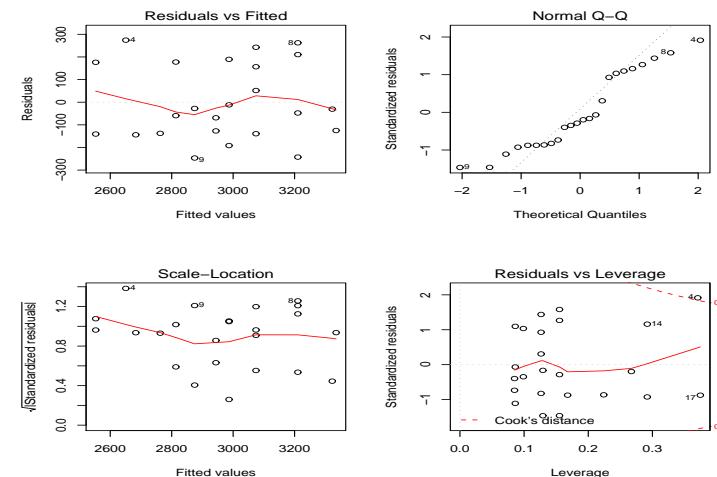
$$\frac{1}{p \hat{\sigma}^2} (\hat{\beta} - \beta)' \mathbf{X}' \mathbf{X} (\hat{\beta} - \beta) \sim F_{p,n-p}$$

og siden senter i F-fordelinger ≈ 1 vil en endring i $D_i \approx 1$ være verdt å merke seg.

Forelesning 3 STK3100 – p. 43/44

Eksempel: Fødselsvekt mot kjønn og sv.lengde

Residualplottet nederst til høyre gir Cook's distanse D_i , max-verdi ≈ 0.5 .



Forelesning 3 STK3100 – p. 44/44