UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Obligatorisk oppgave:	STK 3405 - Elementær innføring i risiko- og pålitelighetsanalyse
Innleveringsfrist:	Torsdag 1. oktober 2015, kl. 14.30
Innleveringssted:	Matematisk instituttts ekspedisjonskontor, 7. etasje, N. H. Abels hus.

Oppgave 1

Vi definerer i denne oppgaven et *binært monotont system*, forkortet BMS, som et ordnet par (C, ϕ) der $C = \{1, \dots, n\}$ er en ikke-tom mengde av komponenter, der $\phi = \phi(\boldsymbol{x})$ er en binær funksjon som er ikke-avtagende i hvert argument, og der $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ er vektoren av binære tilstandsvariable for komponentene i C. Funksjonen ϕ kalles *strukturfunksjonen* til systemet. Et BMS (C, ϕ) sies å være *ikke-trivielt* dersom det finnes to binære vektorer, $\boldsymbol{x}_0$ og $\boldsymbol{x}_1$, slik at $\phi(\boldsymbol{x}_0) = 0$, og $\phi(\boldsymbol{x}_1) = 1$.

(a) Vis at et BMS (C, ϕ) er ikke-trivielt hvis og bare hvis $\phi(\mathbf{0}) = 0$, og $\phi(\mathbf{1}) = 1$, der $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ og $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$.

(b) La (C, ϕ) være et BMS, og anta at $i \in C$. Forklar hva det vil si at i er *relevant*. Definer også hva det vil si at et BMS er *koherent*.

(c) Anta at de minimale stimengdene for (C, ϕ) er $P_1, \dots, P_p$, mens de minimale kuttmengdene for (C, ϕ) er $K_1, \dots, K_k$. Forklar kort hvorfor vi da kan skrive:

$$(1.1) \qquad \phi(\mathbf{x}) = \coprod_{j=1}^{p} \prod_{i \in P_j} x_i = \prod_{j=1}^{k} \coprod_{i \in K_j} x_i$$

(d) Vis at følgende tre påstander er ekvivalente:

(1.2) Komponent i er relevant

(1.3) Komponent i inngår i minst én minimal stimengde

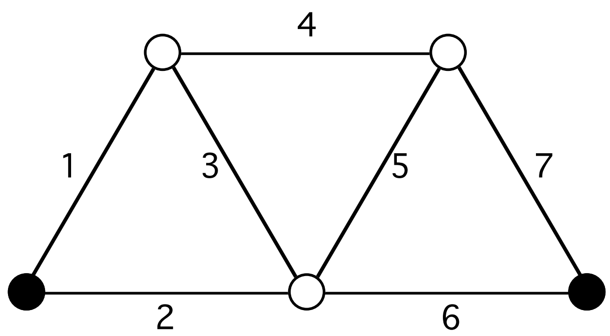
(1.4) Komponent i inngår i minst én minimal kuttmengde

(e) Forklar hvorfor vi alltid har:

$$(1.5) \qquad \bigcup_{j=1}^{p} P_j = \bigcup_{j=1}^{k} K_j$$

(f) La ϕ^D betegne den *duale* strukturfunksjonen. Sett opp en relasjon mellom ϕ og ϕ^D. Vis også at en minimal stimengde for ϕ er en minimal kuttmengde for ϕ^D.

(g) På Figur 1 under har vi illustrert et urettet to-terminals nettverkssystem av 7 komponenter merket 1 til 7. (Nodene i systemet antas å funksjonere perfekt.) Systemet sies å funksjonere dersom de to svarte nodene kan kommunisere gjennom nettverket. Finn systemets minimale sti- og kuttmengder.



Figur 1. Et urettet to-terminals nettverkssystem

(h) Anta at de 7 komponentene i systemet er stokastisk uavhengige, og at i-te komponent har pålitelighet p_i, $i = 1, \dots, 7$. Finn påliteligheten til dette systemet.

(i) Det duale av systemet beskrevet i Figur 1, er også et urettet to-terminals nettverkssystem. Lag en tilsvarende figur som illustrerer hvordan dette systemet ser ut. Forklar kort hvordan man kan gå frem for å finne frem til denne figuren.

Oppgave 2

Vi vil i denne oppgaven betrakte undersjøiske rørledningssystemer til transport av olje. Sannsynligheten for at det *ikke* skal være hull i en bestemt type rørledning er gitt ved:

(2.1) $$P(\ell) = \exp(-\lambda \ell)$$

der $\lambda > 0$ er et fast kjent tall, og $\ell > 0$ betegner lengden av rørledningen.

(a) La h være et positivt tall nær 0. Ved å rekkeutvikle funksjonen P over kan man vise at:

(2.2) $$1 - P(h) \approx \lambda h$$

Benytt (2.2) til å gi en praktisk tolkning av parameteren λ.

(b) Anta at vi har gitt en rørledning av typen over med lengde L. Vi tenker oss denne rørledningen delt opp i n ikke-overlappende deler slik at:

(2.3) ℓ_i = Lengden av i-te del, $\quad i = 1, \dots, n$.

Formel (2.1) antas å gjelde også for hver av de n delene, og vi har altså at:

(2.4) $$L = \sum_{i=1}^{n} \ell_i$$

Vi innfører så:

(2.5) $$X_i = \begin{cases} 1 & \text{hvis det ikke er hull i } i\text{-te del} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}, \qquad i = 1, \dots, n$$

(2.6) $$\phi = \begin{cases} 1 & \text{hvis det ikke er hull i rørledningen} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Forklar kort hvorfor:

(2.7) $$\phi = \phi(X_1,\ldots,X_n) = \prod_{i=1}^{n} X_i ,$$

og hvorfor:

(2.8) $$\Pr(\phi = 1) = \prod_{i=1}^{n} \Pr(X_i = 1)$$

(c) For å overføre olje fra et sted S til et annet sted T brukes to rørledninger av samme type som nevnt over, koblet i parallell. Avstanden fra S til T er L langs begge rørledningene. I tilfelle av hull i en rørledning stenges denne av på hver side av hullet.

Vi antar at rørledningene funksjonerer uavhengig av hverandre. Synes du dette virker som en realistisk antagelse? Begrunn svaret.

Vi betrakter dette rørledningssystemet som et koherent system, og sier at systemet funksjonerer hvis vi minst én intakt rørledning fra S til T. Komponentene i dette systemet er de to rørledningene. Beregn systemets pålitelighet.

(d) For å øke påliteligheten til systemet kobler man inne en bro mellom rørledningene på et sted U mellom S og T. Avstanden fra S til U betegner vi med y. Avstanden fra U til T blir dermed $(L - y)$. Sannsynligheten for at broen funksjonerer antas å være q. Tegn en figur som illustrerer strukturen til det nye systemet. Gjør spesielt rede for hva du betrakter som komponenter i det nye systemet, og sett opp de enkelte komponentenes pålitelighet.

Vi antar at broen og rørledningsdelene funksjonerer uavhengig av hverandre, og at brotilkoblingen ikke endrer rørledningsdelenes pålitelighet.

Vis at påliteligheten til systemet uttrykt ved y og q er gitt ved:

(2.9) $$h_1(y,q) = qe^{-\lambda L}\left(2 - e^{-\lambda y}\right)\left(2 - e^{-\lambda(L-y)}\right) + (1-q)e^{-\lambda L}\left(2 - e^{-\lambda L}\right)$$

(e) Finn den y-verdien som gir størst pålitelighet for systemet. Beregn også $h_1(y, q)$ for denne y-verdien.

(f) Anta at vi i stedet for å koble inn en bro i U, har muligheten til å endre kvaliteten på rørledningene. Mer spesifikt antar vi at dersom man benytter rørledninger med høyere kvalitet, så kan parameteren λ erstattes med en annen verdi $\lambda^* = \lambda/2$. Vis at påliteligheten til systemet i så fall blir:

(2.10) $$h_2 = e^{-\lambda^* L}\left(2 - e^{-\lambda^* L}\right) = e^{-\lambda L/2}\left(2 - e^{-\lambda L/2}\right)$$

(g) Anta til slutt at $q \approx 1$, og at broen plasseres slik at y antar den optimale verdien funnet i punkt (e). Sammenlign i så fall h_1 og h_2. Dersom det koster like mye å koble inn broen som å benytte rørledninger av høyere kvalitet, hvilket alternativ vil du i så fall anbefale.

SLUTT