# UNIVERSITETET I OSLO.

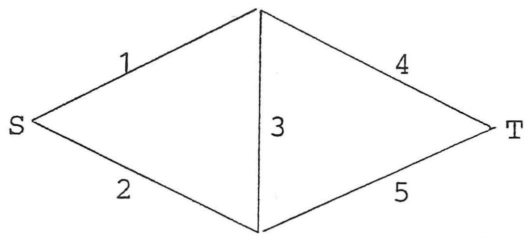
## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet.

Eksamen i: S 105 - Innføring i pålitelighetsanalyse
Eksamensdag: Lørdag 19. november 1983
Tid for eksamen: Kl. 0900 - 1500
Tillatte hjelpemidler: Karl Rottmann: "Mathematische Formelsammlung", elektronisk lommeregner.

Oppgavesettet er på 4 sider.

### Oppgave 1

Figur 1 viser et nettverk av rørledninger til transport av olje fra plattform S til raffineri T.




Figur 1.

Systemets komponentmengde, $C = \{1,\ldots,5\}$, er nettverkets fem rørledninger. (Knutepunktene antas å funksjonere perfekt, og vil derfor ikke bli tatt med i beregningene.)
Betrakt nå systemet på et bestemt tidspunkt og la:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{hvis } i\text{-te komponent funksjonerer} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases},$$

$i=1,\ldots,5,\quad \underline{X} = (X_1,\ldots,X_5)$.

$$\phi(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{hvis vi har forbindelse mellom } S \text{ og } T \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

$p_i = P(X_i = 1),\quad i=1,\ldots,5\quad ,\quad \underline{p} = (p_1,\ldots,p_5)$.

Vi antar at komponentene er stokastisk uavhengige.

a) Finn systemets minimale sti- og kuttmengder.

Oppgaven fortsetter side 2

b) Beregn påliteligheten til systemet, $h_\phi(\underline{p})$.

c) Sett opp strukturfunksjonen til den duale struktur $\phi^D$ og representer denne ved en enkel graf. Finn også påliteligheten knyttet til denne strukturen.

d) Benytt nå Birnbaum's mål for den pålitelighetsmessige betydning av i-te komponent. Utled en sammenheng mellom dette målet for i-te komponent i $\phi$ og $\phi^D$, der $\phi$ er en generell koherent strukturfunksjon.

I praksis vil man ofte ikke være fornøyd med å vite sannsynligheten for forbindelse mellom S og T. Man er i tillegg interessert i informasjon om hvor mye olje man kan regne med å få frem gjennom nettverket. Vi antar nå at hver av de fem rørledninger kan transportere én enhet olje pr. tidsenhet dersom den funksjonerer (ellers intet).

Innfør så:

$M(\underline{X})$ = Totalt antall enheter olje som kan transporteres gjennom systemet pr. tidsenhet.

e) Vis at $M(\underline{X}) \in \{0,1,2\}$ for alle $\underline{X}$.

La videre:

$$\phi_m(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } M(\underline{X}) \geq m \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}, \quad m=1,2.$$

f) Vis at $\phi_1(\underline{X}) = \phi(\underline{X})$ og at $\phi_2(\underline{X}) = X_1 \cdot X_2 \cdot X_4 \cdot X_5$.

Er strukturene $(C,\phi_1)$ og $(C,\phi_2)$ koherente? Begrunn svarene.

g) Vis at

$$M(\underline{X}) = \phi_1(\underline{X}) + \phi_2(\underline{X})$$

og beregn $EM(\underline{X})$.

h) Anta $p_1 = p_3 = p_5 = 7/8$ og $p_2 = p_4 = 1/2$.

Benytt igjen Birnbaum's mål og beregn

$I_{\phi_m}(i)$ = i-te komponents pålitelighetsmessige betydning relativt til strukturen $(C,\phi_m)$,

$i=1,\ldots,5$ og $m=1,2$.

Sammenlign resultatene for de to strukturene.

Oppgaven fortsetter side 3

i) Til slutt - en ønsker å få et mer helhetlig inntrykk av komponentenes pålitelighetsmessige betydning i det trinære system $M(\underline{X})$. Foreslå et mål, $I_M(i)$, og beregn dette for $i=1,\dots,5$ utfra pålitelighetene gitt i h).

Oppgave 2

La $X_1,\dots,X_n$ være komponenttilstandene til en koherent struktur $\phi$ med komponentpåliteligheter $p_1,\dots,p_n$.

a) Anta $X_1,\dots,X_n$ assosierte. Vis at:

$$\prod_{i=1}^{n} p_i \leq P[\phi(\underline{X}) = 1] \leq \coprod_{i=1}^{n} p_i \, .$$

b) La $P_1,\dots,P_p$ være de minimale stimengder og $K_1,\dots,K_k$ de minimale kuttmengder til $\phi$. Vis at vi alltid har:

$$\max_{1\leq j\leq p} P[\min_{i\in P_j} X_i = 1] \leq P[\phi(\underline{X}) = 1] \leq \min_{1\leq j\leq k} P[\max_{i\in K_j} X_i = 1].$$

Hvilken innvending kan det reises mot disse grensene?

c) Anta $X_1,\dots,X_n$ assosierte. Vis at:

$$\max_{1\leq j\leq p} \prod_{i\in P_j} p_i \leq P[\phi(\underline{X}) = 1] \leq \min_{1\leq j<k} \coprod_{i\in K_j} p_i$$

Er disse grensene bedre enn de som ble utledet i a)? Begrunn svaret.

d) Vis hvordan de øvre grensene i a), b) og c) kan utledes ved å anvende de nedre grensene på den duale struktur $\phi^D$.

Oppgave 3

Gjør rede for begrepet risikoaversjon og vis hvordan risikoaversjonsbetraktninger er trukket inn i forbindelse med konkrete risikoanalyser.

Oppgave 4

La $X$ og $\tilde{\theta}$ være stokastiske variable med simultantetthet $p(x,\theta)$ og betingete sannsynlighetstettheter $p(x|\theta)$ og $p(\theta|x)$.

Oppgaven fortsetter side 4