14. september 2020

STK3405

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 1. oktober 2020, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) i god tid før innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

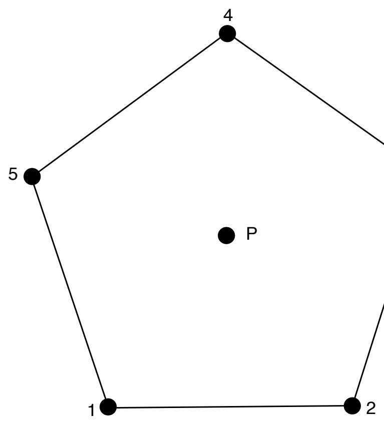
For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Spesielt om det obligatoriske oppgavesettet i STK3405

For å få godkjent besvarelsen, må du ha minst 65 % riktig *på begge oppgavene.*



Figur 1: Et system for styring av en elektronstråle.

Oppgave 1. Vi skal i denne oppgaven betrakte et system for å styre en elektronstråle. Systemet består av fem elektromagneter plassert i hjørnene av en likesidet femkant. Elektronstrålen sendes ut fra en kilde bak denne femkanten, og vil passere femkanten nær sentrum av denne. En svært forenklet tegning av systemet er vist i Figure 1.

I figuren er systemets komponenter, dvs. elektromagnetene, merket $1, \dots, 5$, mens punktet der elektronstrålen passerer, er merket P. For å kunne styre elektronstrålen er det ikke nødvendig at alle elektromagnetene virker. Det er nødvendig og tilstrekkelig at punktet P ligger innenfor det polygonet som utspennes av de hjørnene i femkanten som svarer til de komponentene som virker. Dette betyr f.eks. at minst tre komponenter må virke for at systemet skal virke. Det er imidlertid ikke alle kombinasjoner av tre komponenter som er tilstrekkelig. F.eks. ser vi at trekanten som spennes ut av hjørnene 1, 2 og 3, ikke inneholder P. Hvis derimot f.eks. komponentene 1, 2 og 4 virker, så er dette tilstrekkelig ettersom trekanten med disse hjørnene inneholder P.

(a) Finn systemets minimale stimengder (5 mengder), og systemets minimale kuttmengder (5 mengder).

(b) Vis at systemets strukturfunksjon kan skrives som:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{X}) = {} & X_1X_2X_4 + X_2X_3X_5 + X_1X_3X_4 + X_2X_4X_5 + X_1X_3X_5 \\ & - X_1X_2X_3X_4 - X_1X_2X_3X_5 - X_1X_2X_4X_5 - X_1X_3X_4X_5 - X_2X_3X_4X_5 \\ & + X_1X_2X_3X_4X_5,\end{aligned}$$

der $X_1, \dots, X_5$ er tilstandsvariablene for de fem komponentene.

(c) Legg merke til at alle koeffisientene i uttrykket for ϕ er enten $+1$ eller -1. Nevn en annen type systemer der dette også alltid er tilfelle.

(d) Anta i første omgang at komponentene er stokastisk uavhengige, og at alle komponentene har pålitelighet p. Vis at systempåliteligheten, h, da kan skrives:

$$h(p) = 5p^3 - 5p^4 + p^5$$

(e) Anta spesielt at $p = 0.75$. Beregn h for denne verdien av p. [Svar: 0.7646]

(f) Lag en skisse av hvordan h varierer som funksjon av p. For hvilke verdier av p er $h > p$? [Det kreves ikke eksakte beregninger her. Det er tilstrekkelig at man benytter skissen til å finne et tilnærmet svar på spørsmålet.]

Vi antar i resten av denne oppgaven at elektromagnetene kan svikte på to måter: enten ved at de brenner opp og slutter å virke av den grunn, eller ved at strømmen svikter. Dersom strømmen svikter, svikter alle magnetene. Vi innfører så for $i = 1, \ldots, 5$:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{dersom } i\text{te magnet ikke er brent opp} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

og:

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{dersom strømmen ikke har sviktet} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Vi antar nå at $Y_1, \ldots Y_5$ og Z er stokastisk uavhengige og at $P(Y_i = 1) = \alpha$, $i = 1, \ldots, 5$ mens $P(Z = 1) = \theta$.

(g) Forklar kort hvorfor vi da har at:

$$P(X_i = 1) = \alpha \cdot \theta, \quad i = 1, \ldots, 5.$$

(h) Beregn $\text{Cov}(X_i, X_j)$ for $i \neq j$.

(i) Beregn til slutt påliteligheten til systemet uttrykt ved α og θ.

Oppgave 2. Vi vil i denne oppgaven betrakte undersjøiske rørledningssystemer til transport av olje. Sannsynligheten for at det ikke skal være hull i en bestemt type rørledning er gitt ved:

$$P(\ell) = \exp(-\lambda\ell), \tag{1}$$

der $\lambda > 0$ er et fast kjent tall og $\ell > 0$ betegner lengden av rørledningen.

(a) La $\Delta\ell$ være et positivt tall nær 0. Ved å rekkeutvikle funksjonen P over kan man vise at:

$$1 - P(\Delta\ell) \approx \lambda\Delta\ell.$$

Benytt dette til å gi en praktisk fortolkning av parameteren λ.

(b) Anta at vi har gitt en rørledning av typen over med lengde L. Vi tenker oss denne rørledningen delt opp i n ikke-overlappende deler slik at:

$$\ell_i = \text{ lengden av } i\text{te del}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Formel (1) antas å gjelde også for hver av de n delene, og vi har altså at:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \ell_i.$$

Vi innfører så for $i = 1, \ldots n$:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{hvis det ikke er hull i } i\text{te del} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

og:

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{hvis det ikke er hull i rørledningen} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Forklar kort hvorfor:

$$\phi = \phi(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} X_i,$$

og:

$$P(\phi = 1) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = 1).$$

(c) For å overføre olje fra et sted S til et annet sted T brukes to rørledninger av samme type som nevnt over, koblet i parallell. Avstanden fra S til T er L langs begge rørledningene. I tilfelle av hull i en rørledning stenges denne av på hver side av hullet.

Vi antar at rørledningene funksjonerer uavhengig av hverandre. Synes du dette virker som en realistisk antagelse? Begrunn svaret.

Vi betrakter dette rørledningssystemet som et koherent system, og sier at systemet funksjonerer hvis vi har minst én intakt rørledning fra S til T. Komponentene i dette systemet er de to rørledningene. Beregn systemets pålitelighet.

(d) For å øke påliteligheten til systemet kobler man inn en bro mellom rørledningene på et sted U mellom S og T. Avstanden fra S til U betegner vi med y. Avstanden fra U til T blir dermed $(L - y)$. Sannsynligheten for at broen funksjonerer antas å være q. Tegn en figur som illustrerer strukturen til det nye systemet. Gjør spesielt rede for hva du betrakter som komponenter i det nye systemet, og sett opp de enkelte komponentenes pålitelighet.

Vi antar at broen og rørledningsdelene funksjonerer uavhengig av hverandre, og at tilkoblingen av broen ikke endrer rørledningsdelenes pålitelighet.

Vis at påliteligheten til systemet uttrykt ved y og q er gitt ved:

$$h_1(y, q) = qe^{-\lambda L}(2 - e^{-\lambda y})(2 - e^{-\lambda(L-y)}) + (1 - q)e^{-\lambda L}(2 - e^{-\lambda L}).$$

(e) Finn den y-verdien som gir størst pålitelighet for systemet. Beregn også $h_1(y, q)$ for denne y-verdien.

(f) Anta at vi istedet for å koble inn en bro i U, har muligheten til å endre kvaliteten på rørledningene. Mer spesifikt antar vi at dersom man benytter rørledninger med høyere kvalitet, så kan parameteren λ erstattes med en annen verdi $\lambda^* = \lambda/2$. Vis at påliteligheten til systemet i så fall blir:

$$h_2 = e^{-\lambda^* L}(2 - e^{-\lambda^* L}) = e^{-\lambda L/2}(2 - e^{-\lambda L/2}).$$

(g) Anta til slutt at $q \approx 1$, og at broen plasseres slik at y antar den optimale verdien funnet i punkt (e). Sammenlign i så fall h_1 og h_2. Dersom det koster like mye å koble inn broen som å benytte rørledninger av høyere kvalitet, hvilket alternativ vil du i så fall anbefale.