UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	STK3405/STK4405 — Elementær innføring i risiko- og pålitelighetsanalyse.
Eksamensdag:	Tirsdag 8. desember 2015.
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle 12 underpunkter vektlegges likt ved sensuren.

LØSNING

Oppgave 1

a) Minimale stimengder:

$$\{1,6\},\{2,6\},\{1,4,5,7\},\{2,4,5,7\},\{3,7\},\{3,4,5,6\}$$

Minimale kuttmengder:

$$\{1,2,3\},\{1,2,4,7\},\{1,2,5,7\},\{3,4,6\},\{3,5,6,\},\{6,7\}$$

b) Ved å benytte de minimale stier eller kutt får vi i beste fall (før vi trekker sammen) $2^6 - 1 = 63$ ledd ved å bruke utmultipliseringsmetoden. Ved total tilstandsoppramsing får vi $2^7 - 1 = 127$ ledd.

c) Ved å pivotere mhp. broen bestående av seriekoblingen av komponentene 4 og 5, kommer vi frem til

$$h(\boldsymbol{p}) =$$
$$p_4p_5[(p_1 + p_2 - p_1p_2 + p_3 - (p_1 + p_2 - p_1p_2)p_3)(p_6 + p_7 - p_6p_7)]$$
$$+ (1 - p_4p_5)[(p_1 + p_2 - p_1p_2)p_6 + p_3p_7 - (p_1 + p_2 - p_1p_2)p_6p_3p_7]$$

d)

$$I_B^{(4)} = \partial h(\boldsymbol{p})/\partial p_4 =$$
$$p_5[(p_1 + p_2 - p_1p_2 + p_3 - (p_1 + p_2 - p_1p_2)p_3)(p_6 + p_7 - p_6p_7)]$$
$$- p_5[p_1 + p_2 - p_1p_2)p_6 + p_3p_7 - (p_1 + p_2 - p_1p_2)p_6p_3p_7]$$

(Fortsettes på side 2.)

e) Ved sette inn $p_i = 1/2$ for $i = 1, 2, 3, 5, 6, 7$ i $I_B^{(4)}$ kommer vi frem til

$J_B^{(4)} = (1/2)[(3/4 + 1/2 - 3/8)(3/4) - (1/2)[(3/4)(1/2) + (1/2)(1/2) - 3/32]$
$= (1/2)[21/32 - 17/32] = 4/64 = 1/16$

Alternativt er:

$J_B^{(4)} =$ antall kritiske stimengder for 4. komponent$/(2^{7-1})$

Siden vi har disse 4 kritiske stimengder for 4. komponent, stemmer svaret over:

$$\{1, 4, 5, 7\}, \{2, 4, 5, 7\}, \{1, 2, 4, 5, 7\}, \{3, 4, 5, 6\}$$

f)

$$I_B^{(1)} = \partial h(\boldsymbol{p})/\partial p_1 = p_4 p_5 (1 - p_2)(1 - p_3)(p_6 + p_7 - p_6 p_7)$$
$$+ (1 - p_4 p_5)[(1 - p_2)p_6 - (1 - p_2)p_6 p_3 p_7)]$$

$J_B^{(1)} = (1/4)(1/2)(1/2)(3/4) + (3/4)[1/4 - 1/16] = (3 + 9)/64 = 12/64 = 3/16$

Siden vi har disse 12 kritiske stimengder for 1. komponent, stemmer svaret over:

$\{1, 6\}, \{1, 4, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 7, 6\}, \{1, 4, 5, 6\}, \{1, 4, 3, 6\}, \{1, 4, 7, 6\},$
$\{1, 5, 3, 6\}, \{1, 5, 7, 6\}, \{1, 4, 5, 7\}, \{1, 4, 5, 6, 7\}$

Vi ser at komponentene i broen har langt mindre strukturell betydning komponent 1.

Oppgave 2

a) Se bevis av Teorem 3.5.4 i Natvig (1998).

b) Se bevis av Teorem 3.6.4 i Natvig (1998).

c) Se bevis av Teorem 3.6.7 i Natvig (1998). Grensene er ikke eksplisitte.

d) Se bevis av Korollar 3.6.8 i Natvig (1998).

e) Se bevis av Teorem 3.6.10 ii) i Natvig (1998).

(Fortsettes på side 3.)

f) Betrakt et 3-av-4 system med $p_i = p$, $i = 1, 2, 3, 4$. Da er:

$$\prod_{j=1}^{k} \coprod_{i \in K_j} p_i = \prod_{j=1}^{6} (p + p - p^2) = p^6(2-p)^6$$

Skal vise at:

$$p^6(2-p)^6 < p^4 \Leftrightarrow p^2(2-p)^6 < 1$$

Velg $p = 1/10$.

$$(1/10)^2(2 - 1/10)^6 < 2^6/10^2 = 64/100 < 1$$

Dermed har vi et moteksempel.