UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: STK2400 — Elementær innføring i risiko- og pålitelighetsanalyse

Eksamensdag: Onsdag 8. desember 2010

Tid for eksamen: 14.30 – 18.30

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Ingen

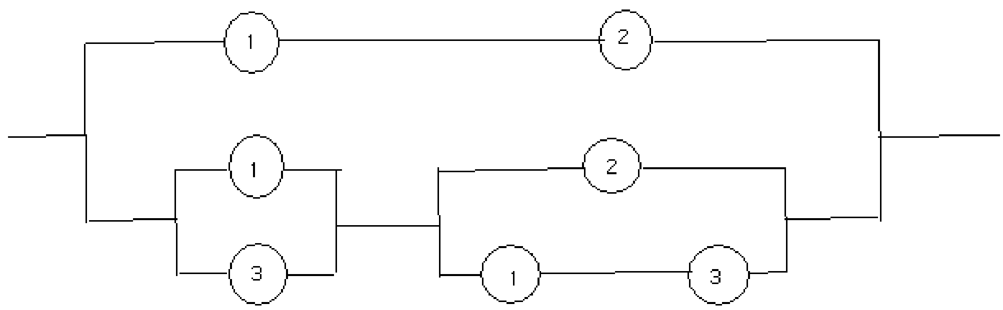
Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 12 punkter som alle teller likt ved sensuren.

Oppgave 1

Etabler en forenklet systembeskrivelse for systemet gitt ved følgende blokkdiagram:



Hva slags system er dette egentlig?

Oppgave 2

Betrakt et monotont system ϕ med strukturfunksjon $\phi(\underline{X})$ og systempålitelighet $h = E\phi(\underline{X})$.

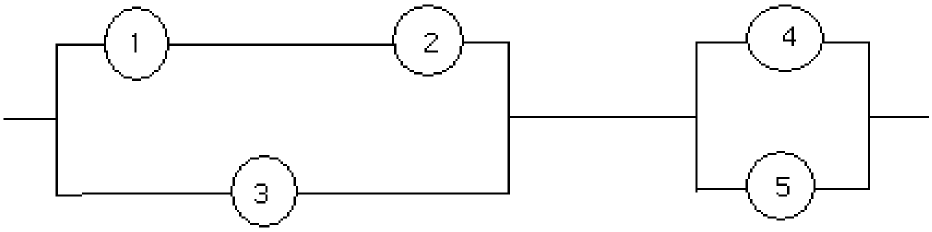
(a) La de minimale stimengder for ϕ være $P_1, P_2, \ldots, P_p$ og definer E_j som begivenheten at alle komponenter i P_j funksjonerer ($j = 1, 2, \ldots, p$).

Forklar hvorfor vi har ulikheten

$$h \leq \sum_{j=1}^{p} P(E_j). \tag{1}$$

(Fortsettes på side 2.)

Anta i resten av oppgaven at systemet ϕ er gitt ved følgende blokkdiagram:



(b) Finn et uttrykk for strukturfunksjonen $\phi(\underline{X})$.

Sett opp et uttrykk for systempåliteligheten h når det antas at komponentene er uavhengige med samme pålitelighet p.

Regn ut h når $p = 0.90$ og når $p = 0.10$.

(c) Bestem de minimale stimengdene og de minimale kuttmengdene for systemet.

Bruk (1) fra punkt (a) til å finne en øvre grense for h når komponentene er uavhengige med samme pålitelighet p, og beregn denne grensen når $p = 0.90$ og $p = 0.10$. Kommentér resultatene.

(d) La ϕ^D være det duale system til ϕ.

Hvilken praktisk fortolkning kan du gi ϕ^D?

Hva er de minimale stimengdene og de minimale kuttmengdene til ϕ^D?

Tegn et blokkdiagram for ϕ^D der hver komponent forekommer bare én gang.

(e) Forklar hvordan du kan bruke ulikheten (1) anvendt på systemet ϕ^D til å finne en nedre grense for h når det som før antas at komponentene i ϕ er uavhengige med samme pålitelighet p.

Beregn denne grensen for $p = 0.90$ og $p = 0.10$.

Kommentér også disse resultatene, og sammenlign med resultatene i punkt (c). Er det et mønster i hvor godt de beregnede grensene approksimerer den eksakte h?

(f) Ranger komponentene 1, 3 og 4 i systemet ϕ med hensyn på Birnbaums mål for *strukturell* betydning.

Kan du gi en intuitiv begrunnelse for denne rangeringen ut fra blokkdiagrammet øverst på siden?

(g) I systemet ϕ er det tre vektorer $(\cdot_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ med egenskapen at komponent 1 er kritisk.

Sett opp disse vektorene, og bruk dette til å finne verdien for Birnbaums mål for den *pålitelighetsmessige* betydning av komponent nr. 1 i systemet ϕ når komponentene er uavhengige med påliteligheter p_i $(i = 1, \ldots, 5)$.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 3

Et system består av n komponenter koplet i serie. Erfaring har vist at levetiden T_i for komponent nr. i ($i = 1, 2, \dots, n$) er eksponensialfordelt med hasardrate $\lambda_i > 0$, slik at

$$P(T_i > t) = e^{-\lambda_i t} \text{ for } t \geq 0.$$

La T være levetiden for systemet, dvs. $T = \min(T_1, T_2, \dots, T_n)$.

(a) Anta i dette punktet at komponentenes levetider er uavhengige. Vis at vi da har

$$P(T > t) = e^{\left(-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)t} \text{ for } t \geq 0, \tag{2}$$

dvs. at T er eksponensialfordelt med hasardrate $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

(*Minimum av et sett uavhengige eksponensialfordelte variable er dermed eksponensialfordelt, med hasardrate lik summen av alle hasardratene.* Du kan få bruk for dette resultatet senere i oppgaven).

(b) Man finner grunn til å tro at komponentene ikke har uavhengige levetider, men at levetidene $T_1, T_2, \dots, T_n$ isteden er assosierte med de samme marginale fordelinger som angitt foran punkt (a).

Hvis komponentene i virkeligheten er assosierte, og man bruker (2) til å regne ut sannsynligheten for at systemet overlever en tid t, har man da overestimert eller underestimert den virkelige sannsynligheten? Begrunn svaret ved å henvise til resultater for assosierte variable.

Grunnen til at man tror at komponentenes levetider er assosierte, er at det i systemet kan oppstå fellesfeil som får alle komponentene til å feile samtidig. Vi vil nå forsøke å ta dette med i modellen. La U være tiden til det skjer en fellesfeil, og anta at denne tiden er eksponensialfordelt med hasardrate a, dvs. at

$$P(U > t) = e^{-at} \text{ for } t \geq 0,$$

der $a < \lambda_i$ for $i = 1, 2, \dots, n$.

La T_i^* være tiden til komponent nr. i feiler av årsaker innen komponenten selv ($i = 1, 2, \dots, n$). Anta at $T_1^*, T_2^*, \dots, T_n^*$ er uavhengige og eksponensialfordelte, og at de er uavhengige av U.

(c) Forklar hvorfor

$$T_i = \min(T_i^*, U) \text{ for } i = 1, 2, \dots, n$$

og at hasardraten for T_i^* er $\lambda_i^* = \lambda_i - a$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Hvorfor er $T_1, T_2, \dots, T_n$ nå assosierte?

(d) Finn et eksakt uttrykk for $P(T > t)$ i modellen med fellesfeil beskrevet ovenfor.

(*Vink:* Forklar hvorfor $T = \min(T_1^*, T_2^*, \dots, T_n^*, U)$).

Sammenlign med svaret for $P(T > t)$ fra (a), som var beregnet under antagelsen om uavhengighet.

Gjør rede for at resultatet i dette punktet er i tråd med svaret på spørsmålet som ble stilt i punkt (b).

SLUTT