UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK2400 — Elementær innføring i risiko- og pålitelighetsanalyse.
Eksamensdag:	Onsdag 7. desember 2011.
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle* 11 *underpunkter vektlegges likt ved sensuren.

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a) Minimale stimengder:

$$\{1,7\}, \{1,5,6,8\}, \{2,7\}, \{2,5,6,8\}, \{3,5,7\}, \{3,6,8\}, \{4,8\}, \{4,5,6,7\}$$

Minimale kuttmengder:

$$\{1,2,3,4\}, \{1,2,5,8\}, \{1,2,4,5,6\}, \{1,2,3,6,8\}, \{3,4,5,7\}, \{4,6,7\}, \{7,8\}$$

b) Ved å basere oss på de minimale kutt får vi i beste fall (før vi trekker sammen) $2^7 - 1 = 127$ ledd ved å bruke utmultipliseringsmetoden. Ved total tilstandsoppramsing får vi $2^8 - 1 = 255$ ledd.

c) Komponentene 1 og 2 er i parallell. Vi pivotdekomponerer mhp. 5. komponent. Hvis denne komponenten funksjonerer, får vi en brostruktur med 6. komponent som bro og øvre, venstre gren bestående av parallell koblingen av komponentene 1, 2 og 3. Pivoterer så mhp. 6. komponent. Hvis 5. komponent ikke funksjonerer, får vi et greit s-p system. Dette gir:

(Fortsettes på side 2.)

$$
\begin{aligned}
h(\boldsymbol{p}) &= p_5 p_6 (p_1 \amalg p_2 \amalg p_3 \amalg p_4)(p_7 \amalg p_8) \\
&+ p_5(1-p_6)[((p_1 \amalg p_2 \amalg p_3)p_7) \amalg p_4 p_8] \\
&+ (1-p_5)[((p_1 \amalg p_2)p_7) \amalg (((p_3 p_6) \amalg p_4)p_8)]
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
&I_B^{(5)} = h(1_5, \boldsymbol{p}) - h(0_5, \boldsymbol{p}) = p_6(p_1 \amalg p_2 \amalg p_3 \amalg p_4)(p_7 \amalg p_8) \\
&+ (1-p_6)[((p_1 \amalg p_2 \amalg p_3)p_7) \amalg p_4 p_8] - ((p_1 \amalg p_2)p_7) \amalg (((p_3 p_6) \amalg p_4)p_8)
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
&J_B^{(5)} = h(1_5, \mathbf{1/2}) - h(0_5, \mathbf{1/2}) \\
&= 1/2(1/2 \amalg 1/2 \amalg 1/2 \amalg 1/2)(1/2 \amalg 1/2) \\
&+ (1/2)[((1/2 \amalg 1/2 \amalg 1/2)1/2) \amalg ((1/2)(1/2))] \\
&- ((1/2 \amalg 1/2)1/2) \amalg ((((1/2)(1/2)) \amalg 1/2)1/2) \\
&= 1/2(3/4 \amalg 3/4)(3/4) + (1/2)[((3/4 \amalg 1/2)1/2) \amalg 1/4] \\
&- ((3/4)(1/2)) \amalg ((1/4 + 1/2 - 1/8)1/2) \\
&= 1/2(6/4 - 9/16)(3/4) + (1/2)[((3/4 + 1/2 - 3/8)1/2) \amalg 1/4] \\
&- 3/8 \amalg 5/16 = 1/2(15/16)(3/4) + (1/2)(7/16 + 1/4 - 7/64) \\
&- (3/8 + 5/16 - 15/128) = 45/128 + 37/128 - 73/128 = 9/128
\end{aligned}
$$

Alternativt er:

$J_B^{(5)}$ = antall kritiske stimengder for 5. komponent/(2^{8-1})

Siden vi har følgende 9 kritiske stimengder for 5. komponent, stemmer svaret over:

$\{1,5,6,8\}, \{1,2,5,6,8\}, \{2,5,6,8\}, \{3,5,7\}, \{3,4,5,7\}, \{3,5,6,7\}, \{3,4,5,6,7\}, \{3,5,7,8\}, \{4,5,6,7\}$

Oppgave 2

a) Se bevis av Teorem 3.6.1 i Natvig (1998).

b) Se kommentar etter beviset av Teorem 3.6.1 i Natvig (1998).

c) Se bevis av Teorem 3.6.4 i Natvig (1998).

(Fortsettes på side 3.)

Et seriesystem feiler når den første komponenten feiler. Positiv avhengighet betyr at komponentene støtter hverandre til å stå i mot å feile. Det betyr at seriesystemet lever lenger og er mer pålitelig. Uavhengighet betyr at komponentene ikke støtter hverandre, og seriesystemet er da minst pålitelig.

Et parallellsystem feiler når den siste komponenten feiler. Positiv avhengighet betyr at hvis en komponent feiler, så feiler de andre fortere dvs. at komponentene ikke støtter hverandre. Dette betyr at parallellsystemet lever kortere og er mindre pålitelig. Uavhengighet betyr at komponentene ikke lar seg påvirke av at andre komponenter feiler, og parallellsystemet er derfor mest pålitelig.

d) Se bevis av Teorem 3.6.5 og Korollar 3.6.6 i Natvig (1998). Siden en har antatt at komponenttilstandene er uavhengige, ser en direkte uten å bruke teorien for assosierte tilfeldige variable at:

$$\prod_{i \in P_j} p_i = \prod_{i \in P_j} EX_i = E \prod_{i \in P_j} X_i = P[min_{i \in P_j} X_i = 1]$$

e)

$$\max_{1 \le j \le p^D} \prod_{i \in P_j^D} p_i^D \le h^D(\boldsymbol{p}^D) \Leftrightarrow \max_{1 \le j \le k} \prod_{i \in K_j} (1 - p_i) \le 1 - h(\boldsymbol{p})$$

$$\Leftrightarrow h(\boldsymbol{p}) \le \min_{1 \le j \le k} \prod_{i \in K_j} p_i$$

f) Se siste del av beviset av Teorem 3.6.10 i Natvig (1998).