UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	STK4400/STK9400 — Risiko- og pålitelighetsanalyse
Eksamensdag:	Torsdag 9. juni, 2011
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Innfør notasjonen

$$\begin{aligned} x \vee y &= \max(x, y) \\ \boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y} &= (x_1 \vee y_1, \ldots, x_n \vee y_n). \end{aligned}$$

La ϕ være strukturfunksjonen til et MCS og anta $S_i = S, i = 1, \ldots, n$.

(a) Vis at for alle $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{y}$

$$\phi(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) \geq \phi(\boldsymbol{x}) \vee \phi(\boldsymbol{y}).$$

(b) Vis videre at likhet holder for alle $\boldsymbol{x}$ og $\boldsymbol{y}$ i (a) hviss strukturfunksjonen er parallell, dvs.

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \max_{1 \leq i \leq n} x_i.$$

Oppgave 2

La (C, ϕ) være et MMS. Videre, for $j \in \{1, \ldots, M\}$ la $\boldsymbol{z}_k^j = (z_{1k}^j, \ldots, z_{nk}^j)$, $k = 1, \ldots, m_\phi^j$ være dets minimale kuttvektorer til nivå j og $D_\phi^j(\boldsymbol{z}_k^j), k = 1, \ldots, m_\phi^j$ de tilhørende minimale kuttmengder til nivå j. Innfør videre følgende generalisering av de minimale kuttparallellstrukturer fra binær teori

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{z}_k^j}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{ellers} \\ 0 & \text{hvis } x_i \leq z_{ik}^j \text{ for } i \in D_\phi^j(\boldsymbol{z}_k^j) \end{cases}.$$

(Fortsettes på side 2.)

(a) Vis at

$$\phi(\boldsymbol{x}) < j$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists\ 1 \leq k \leq m_\phi^j \text{ slik at } x_i \leq z_{ik}^j \text{ for } i \in D_\phi^j(\boldsymbol{z}_k^j)$$
$$\Updownarrow$$
$$\min_{1\leq k\leq m_\phi^j} \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{z}_k^j}(\boldsymbol{x}) = \prod_{k=1}^{m_\phi^j} \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{z}_k^j}(\boldsymbol{x}) = 0.$$

(b) La

$$\ell_\phi^{*j} = \prod_{k=1}^{m_\phi^j} P(\bigcup_{i\in D_\phi^j(\boldsymbol{z}_k^j)} (X_i > z_{ik}^j)).$$

Vis at

$$\ell_\phi^{*j} \leq p_\phi^j = P[\phi(\boldsymbol{X}) \geq j].$$

(c) Videre la

$$\ell_\phi^{**j}(\boldsymbol{P}_\phi) = \prod_{k=1}^{m_\phi^j} \coprod_{i\in D_\phi^j(\boldsymbol{z}_k^j)} p_i^{z_{ik}^j+1},$$

der $p_i^j = P[X_i \geq j]$. Hvis $X_1, \ldots, X_n$ er uavhengige, vis at vi da har

$$\ell_\phi^{*j} = \ell_\phi^{**j}(\boldsymbol{P}_\phi) \leq p_\phi^j = P[\phi(\boldsymbol{X}) \geq j].$$

Oppgave 3

I denne oppgaven betrakter vi produksjonen fra n oljereservoarer som deler en felles prosessenhet med samlet kapasitet K. La $\boldsymbol{Q}(t) = (Q_1(t), \ldots, Q_n(t))$ betegne vektoren av kumulative produksjonsfunksjoner for de n reservoarene, og la $\boldsymbol{f}(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ være de tilhørende potensielle produksjonsratefunksjonene (PPR-funksjonene). La videre $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(t) = (b_1(t), \ldots, b_n(t))$ betegne en produksjonsstrategi, og la $\boldsymbol{q}(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t))$ betegne den resulterende vektoren av faktiske produksjonsrater på tid $t \geq 0$.

(a) Sett opp sammenhengen mellom $q_i(t)$, $Q_i(t)$, $f_i(t)$ og $b_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, og gi en praktisk fortolkning av denne. Hvilke krav må produksjonsstrategien $\boldsymbol{b}$ tilfredsstille for at denne skal være en *gyldig* (valid) strategi? Forklar også hva en *admissibel* produksjonsstrategi er?

For å indikere at de kumulative produksjonsfunksjonene avhenger av den valgte produksjonsstrategien, skriver vi heretter $Q_i(t, \boldsymbol{b})$ i stedet for $Q_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$.

(Fortsettes på side 3.)

(b) La $\mathcal{B}$ og $\mathcal{B}'$ betegne henholdsvis familien av gyldige og admissible produksjonsstrategier, og la $\phi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ være en objektivfunksjon. Vi sier at ϕ er *symmetrisk* dersom for enhver gitt produksjonsstrategi $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}$ så avhenger ϕ av $\boldsymbol{b}$ kun via den totale kumulative produksjonsfunksjonen $Q(\cdot, \boldsymbol{b})$, gitt ved:

$$Q(t, \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{n} Q_i(t, \boldsymbol{b}), \quad t \geq 0.$$

Dette betyr mer presist at hvis ϕ er en symmetrisk objektivfunksjon, og $\boldsymbol{b}^1, \boldsymbol{b}^2 \in \mathcal{B}$ er slik at:

$$Q(t, \boldsymbol{b}^1) = Q(t, \boldsymbol{b}^2), \text{ for alle } t \geq 0,$$

så er $\phi(\boldsymbol{b}^1) = \phi(\boldsymbol{b}^2)$. Gi en praktisk fortolkning av hva det vil si at en objektivfunksjon er symmetrisk. Gi et eksempel på en situasjon der det *ikke* er naturlig å benytte symmetriske objektivfunksjoner.

(c) La $T_K(\boldsymbol{b})$ betegne platålengden for en produksjonsstrategi $\boldsymbol{b}$, dvs.:

$$T_K(\boldsymbol{b}) = \inf\{t \geq 0 : \sum_{i=1}^{n} f_i(Q_i(t, \boldsymbol{b})) < K\}.$$

Anta så at ϕ er en symmetrisk objektivfunksjon, og at $\boldsymbol{b}^1, \boldsymbol{b}^2 \in \mathcal{B}'$ er slik at:

$$Q_i(T_K(\boldsymbol{b}^1), \boldsymbol{b}^1) = Q_i(T_K(\boldsymbol{b}^2), \boldsymbol{b}^2), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Forklar hvorfor dette medfører at $T_K(\boldsymbol{b}^1) = T_K(\boldsymbol{b}^2)$, og benytt dette til å vise at da må også $\phi(\boldsymbol{b}^1) = \phi(\boldsymbol{b}^2)$.

(d) Gjør kort rede for hvordan resultatet fra (c) kan brukes i forbindelse med optimering av produksjonsstrategier.

Oppgave 4

Vi betrakter et *reparerbart system* som opererer fra tid $t = 0$. La $N(s, t)$ for $0 \leq s < t$ betegne antall feil i tidsintervallet $(s, t]$ og la $N(0, t)$ for enkelthets skyld betegnes $N(t)$. Videre settes $W(s, t) = E[N(s, t)]$ og $W(t) = E[N(t)]$.

Nedenfor betraktes m systemer av typen ovenfor. Disse antas å operere uavhengig av hverandre, hver med kumulativ ROCOF $W(t)$. Tema for oppgaven er estimering av $W(t)$.

Det antas at prosess nr. j ($j = 1, 2, \ldots, m$) er observert på tidsintervallet $[0, \tau_j]$. Her er $\tau_1, \ldots, \tau_m$ gitte konstanter, og vi setter $\tau_{max} = \max\{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$.

Vi lar videre $y(t)$ være antallet av de m systemene som opererer innenfor sine respektive tidsintervall ved tidspunkt $t \geq 0$ (egentlig umiddelbart før t). Merk at $y(t)$ er deterministisk, da den bare avhenger av konstantene $\tau_1, \ldots, \tau_m$.

(Fortsettes på side 4.)

La

$$h_0 = 0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_r = \tau_{max}$$

gi en oppdeling av tidsaksen fra 0 til τ_{max}. Anta at hver av $\tau_1, \ldots, \tau_m$ er lik en av disse h_k-ene.

For $i = 1, \ldots, r$, definer:

- D_i = antall observerte feil i intervallet $(h_{i-1}, h_i]$ (summert over alle de m systemene).
- y_i = antall systemer som opererer i intervallet $(h_{i-1}, h_i]$, dvs. at y_i er verdien til $y(t)$ i intervallet.

(a) Gjør greie for at

$$E[D_i] = y_i W(h_{i-1}, h_i) \qquad (1)$$

for $i = 1, 2, \ldots, r$.

Bruk dette til å vise at for $k = 1, 2, \ldots, r$ er en forventningsrett estimator for $W(h_k)$ gitt ved

$$\hat{W}(h_k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{D_i}{y_i}. \qquad (2)$$

I resten av oppgaven antas at de m prosessene er ikke-homogene Poisson-prosesser med intensitet (ROCOF) $w(t) = W'(t)$ (der den deriverte antas å eksistere).

(b) Forklar (kort) ved å bruke egenskaper ved ikke-homogene Poisson-prosesser hvorfor $D_1, D_2, \ldots, D_r$ nå er uavhengige og Poisson-fordelte med parametre gitt ved (1).

Finn et uttrykk for $Var[\hat{W}(h_k)]$ for $k = 1, 2, \ldots, r$. Hvordan vil du estimere denne variansen fra de observerte $D_1, \ldots, D_r$?

(*Vink:* For en Poisson-fordelt D er $Var[D] = E[D]$).

(c) Anta at ROCOF for prosessen er gitt ved en parametrisk modell $w(t; \theta)$ og at de forventede antall feil i intervaller $(s, t]$ tilsvarende er gitt på parametrisk form $W(s, t; \theta)$.

Vis at likelihood-funksjonen for θ når observasjonene er gitt som $d_1, \ldots, d_r$ kan skrives

$$L(\theta; d_1, \ldots, d_r) = \left\{ \prod_{i=1}^{r} \frac{[y_i W(h_{i-1}, h_i; \theta)]^{d_i}}{d_i!} \right\} e^{-\sum_{j=1}^{m} W(\tau_j; \theta)}.$$

(*Vink:* Likelihood-funksjonen er her det samme som simultanfordelingen for $D_1, \ldots, D_r$.)

(d) Anta i dette punktet at vi har registrert de eksakte feiltidspunktene $t_1, t_2, \ldots, t_n$, der

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \tau_{max},$$

(Fortsettes på side 5.)

og der det ikke er tatt hensyn til hvilken prosess de enkelte tidene kommer fra. Merk at det er observert bare én feil ved hvert tidspunkt.

Forklar hvordan estimatoren (2) leder til den såkalte Nelson-Aalen estimatoren for $W(t)$,

$$\hat{W}_{NA}(t) = \sum_{t_\ell \leq t} \frac{1}{y(t_\ell)}, \text{ for } 0 < t \leq \tau_{max}.$$

SLUTT