UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK4400 — Risiko- og pålitelighetsanalyse
Eksamensdag:	Onsdag 15. juni, 2016
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

(a) Angi definisjonene av et multinært sterkt koherent system, et multinært koherent system og et multinært svakt koherent system. Forklar det innbyrdes forholdet mellom disse tre.

(b) Angi definisjonen av et binær type multinært monotont system. Hva er ideen bak dette målet?

Oppgave 2.

(a) Anta at $X_1, \ldots, X_n$ er assosierte tilfeldige variable. Vis at for $j \in \{1, \ldots, M\}$ har vi for det multinære seriesystemet

$$P[\min_{1 \leq i \leq n} X_i \geq j] \geq \prod_{i=1}^{n} p_i^j \tag{1}$$

(b) La ϕ være en multinær strukturfunksjon som er ikkeavtagende i hvert argument og vi antar at

(Fortsettes side 2.)

$$\min_{1 \le i \le n} x_i \le \phi(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

Anta at $X_1, \ldots, X_n$ er assosierte tilfeldige variable. Vis at vi har

$$\prod_{i=1}^{n} p_i^j \le p_\phi^j \tag{3}$$

Kommenter resultatet.

Oppgave 3.

La $\boldsymbol{X}$ være en vektor av miljøvariable med utfallsrom $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$. La videre $P_e \in (0, 0.5)$ være en gitt overskridelsessannsynlighet. Vi skal i denne oppgaven se på hvordan man kan identifisere en konveks mengde $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ slik at for alle hyperplan Π som tangerer $\mathcal{B}$, så holder $P[\boldsymbol{X} \in \Pi^+] = P_e$, der Π^+ betegner det halvrommet som er avgrenset av hyperplanet Π og som ikke inneholder $\mathcal{B}$. Vi innfører også Π^- som betegnelse på det halvrommet som er komplementært til Π^+, slik at $\mathcal{B} \subseteq \Pi^-$. Randen til $\mathcal{B}$ betegnes med $\partial\mathcal{B}$ og er det vi kaller en *miljøkontur*.

(a) Forklar hvordan en slik miljøkontur kan brukes til å sjekke om en bestemt mekanisk struktur er trygg.

Vi antar i resten av oppgaven at $\boldsymbol{X} = (T, H)$. For $\theta \in [0, 2\pi)$ definerer vi så den stokastiske variabelen $Y(\theta) = T\cos(\theta) + H\sin(\theta)$. Vi innfører også funksjonen $C(\theta)$ definert for $\theta \in [0, 2\pi)$:

$$C(\theta) = \inf\{C : P[T\cos(\theta) + H\sin(\theta) > C] = P_e\}.$$

(b) Hva slags egenskap har $C(\theta)$ i forhold til sannsynlighetsfordelingen til $Y(\theta)$?

Vi innfører også:

$$\begin{aligned}
\Pi(\theta) &= \{(t, h) : t\cos(\theta) + h\sin(\theta) = C(\theta)\}, \\
\Pi^+(\theta) &= \{(t, h) : t\cos(\theta) + h\sin(\theta) > C(\theta)\}, \\
\Pi^-(\theta) &= \{(t, h) : t\cos(\theta) + h\sin(\theta) \le C(\theta)\}.
\end{aligned}$$

Det kan da vises at mengden $\mathcal{B}$ kan skrives:

$$\mathcal{B} = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi)} \Pi^-(\theta).$$

Vi betrakter skjæringspunktet $(t(\theta_1, \theta_2), h(\theta_1, \theta_2))$ mellom de to hyperplanene $\Pi(\theta_1)$ og $\Pi(\theta_2)$.

(Fortsettes side 3.)

(c) Vis den førate av de to følgende relasjoner:

$$t(\theta_1, \theta_2) = \frac{\sin(\theta_2) C(\theta_1) - \sin(\theta_1) C(\theta_2)}{\sin(\theta_2 - \theta_1)}$$

$$h(\theta_1, \theta_2) = \frac{-\cos(\theta_2) C(\theta_1) + \cos(\theta_1) C(\theta_2)}{\sin(\theta_2 - \theta_1)}$$

La så $(t(\theta), h(\theta)) = \lim_{\delta \to 0^+} (t(\theta, \theta + \delta), h(\theta, \theta + \delta))$.

(d) Vis at:

$$\begin{pmatrix} t(\theta) \\ h(\theta) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C(\theta) & -C'(\theta) \\ C'(\theta) & C(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix},$$

der $C'(\theta)$ betegner den deriverte av $C(\theta)$, og forklar kort hvordan dette uttrykket kan brukes til å identifisere $\partial \mathcal{B}$.

(e) Hva slags kurve blir $\partial \mathcal{B}$ dersom $C(\theta) = R$ for alle $\theta \in [0, 2\pi)$? Begrunn svaret.

Anta at vi har utført en Monte Carlo-simulering basert på simultanfordelingen til (T, H), og at vi har generert n vektorer:

$$(T_1, H_1), \ldots, (T_n, H_n) \tag{4}$$

For en gitt $\theta \in [0, 2\pi)$ beregner vi så:

$$Y_i(\theta) = T_i \cos(\theta) + H_i \sin(\theta), \quad i = 1, \ldots, n \tag{5}$$

(f) Forklar hvordan vi kan benytte $Y_1(\theta), \ldots, Y_n(\theta)$ til å estimere $C(\theta)$.

Oppgave 4.

Betrakt hendelser som opptrer på en tidsakse som starter ved tid $t = 0$. La $0 < S_1 < S_2 < \ldots$ være hendelsestidspunktene og la $T_i = S_i - S_{i-1}$ være tider mellom hendelser, der $S_0 = 0$. La videre $N(t)$ for $t > 0$ betegne antall hendelser i tidsintervallet $(0, t]$.

(a) Definer hva det betyr at prosessen $S_1, S_2, \ldots$ er en ikke-homogen Poisson prosess (NHPP) med intensitetsfunksjon $w(t)$. Definer også den kumulative intensitetsfunksjonen $W(t)$ og skriv ned sannsynlighetsfordelingen til $N(t)$ for gitt $t > 0$.

Et programvaresystem svikter på tilfeldige tidspunkter forårsaket av feil som finnes i koden. La $N(t)$ være det kumulative antall svikt som har inntruffet ved tid t. Vi antar at hver svikt er forårsaket av nøyaktig én feil i koden, og at denne feilen blir fjernet fra programvaren etter

(Fortsettes side 4.)

hver svikt. Derfor vil $N(t)$ også representere det kumulative antall feil som er oppdaget og fjernet ved tid t.

En klassisk modell for programvarepålitelighet er *Goel og Okumotos tidsavhengige feildeteksjonsmodell* (GO-modellen), hvor man antar at $N(t)$ er en NHPP med intensitetsfunksjon på formen

$$w(t) = \alpha\beta e^{-\beta t}$$

for parametre $\alpha > 0, \beta > 0$.

(b) Finn den kumulative intensitetsfunksjonen $W(t)$. Hva er tolkningen av $W(t)$?

Hva er grensen for $W(t)$ når $t \to \infty$? Forklar hvorfor denne grensen gir en rimelig tolkning av parameteren α som "initielt antall feil" i koden.

(c) Anta at programvaresystemet har blitt kjørt til tid $s > 0$. Den *betingede pålitelighetsfunksjonen* $R(t|s)$ for programvaren på tidspunkt s er definert som sannsynligheten for at programvaren fungerer uten feil i minst tid t etter tid s. Vis at

$$R(t|s) = \exp\left(-e^{-\beta s} W(t)\right). \tag{6}$$

GO-modellen brukes spesielt i programvaretesting. Anta at verdiene for α og β er estimert fra tidligere data og dermed kan antas kjent. Da kan (6) brukes til å beregne en *optimal testtid* s_0 ved å kreve for testtiden s at den betingede pålitelighet $R(t_0|s)$ skal være minst lik en gitt verdi r $(0 < r < 1)$, for en gitt tid t_0.

(d) Utled den resulterende s_0 uttrykt ved α, β, r og t_0. Diskutér spesielt valget $t_0 = \infty$.

Det vises til tolkningen av parameteren α som "initielt antall feil" i koden. I *Jelinski-Moranda modellen for programvarepålitelighet* (JM-modellen) er det *sanne* initielle antall feil, a, en ukjent parameter, som dermed er et ikke-negativt heltall som vi skal anta er minst lik 1.

Den grunnleggende forutsetningen i JM-modellen er at tiden T_i mellom svikt nummer $i-1$ og svikt nummer i er eksponensialfordelt med hasardrate

$$\lambda_i = (a - i + 1)b$$

for $i = 1, 2, \ldots, a$, der $b > 0$ er den andre parameteren i modellen. Det antas videre at $T_1, T_2, \ldots, T_a$ er *stokastisk uavhengige*.

(e) Forklar hvorfor tidspunktet S_a for svikt nummer a kan tolkes som tidspunktet da alle feilene i koden er funnet.

Utled et eksakt uttrykk for $E(S_a)$, dvs. den forventede tid til programvaren er feilfri. Verifiser deretter approksimasjonen

$$E(S_a) \approx \frac{\ln a}{b}$$

når a er stor.

SLUTT