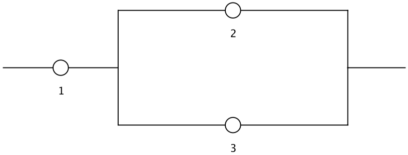
SIGNERT DOMINASJON OG RETTEDE MATROIDESYSTEMER

Arne B. Huseby

Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

Binære monotone systemer



Grunnelementer i modell:

$$X_i = I(i\text{te komponent virker}), \qquad i = 1, 2, 3$$

$$\phi(\boldsymbol{X}) = I(\text{Systemet virker}) = X_1 X_2 + X_1 X_3 - X_1 X_2 X_3$$

Påliteligheten til systemet:

$$Pr(\phi(\boldsymbol{X}) = 1) = E[\phi(\boldsymbol{X})] = E[X_1 X_2] + E[X_1 X_3] - E[X_1 X_2 X_3]$$

Multilineæritet og dominasjon

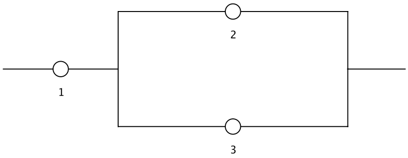
La (E, ϕ) være et binært monotont system, der $E = \{1, \ldots, n\}$ er systemets komponentmengde, og ϕ er systemets strukturfunksjon. ϕ er da alltid en multilineær funksjon:

$$\phi(\boldsymbol{X}) = \sum_{A \subseteq E} \delta(A) \prod_{i \in A} X_i$$

der $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ er vektoren av komponenttilstandsvariable.

Koeffisientfunksjonen δ, definert for alle delmengder $A \subseteq E$, kalles systemets signerte dominasjonsfunksjon.

Multilineæritet og dominasjon (forts.)



$$\phi(\boldsymbol{X}) = X_1 X_2 + X_1 X_3 - X_1 X_2 X_3$$

Herav:

$$\delta(\{1,2\}) = 1, \qquad \delta(\{1,3\}) = 1, \qquad d(\phi) = \delta(\{1,2,3\}) = -1$$

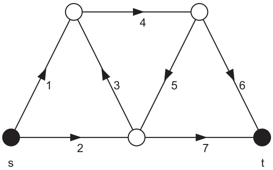
Multilineæritet og dominasjon (forts.)

Pålitelighet uttrykt ved dominasjon:

$$\Pr(\phi(\boldsymbol{X}) = 1) = E[\phi(\boldsymbol{X})] = \sum_{A \subseteq E} \delta(A) E[\prod_{i \in A} X_i]$$

- Strukturfunksjonen og systemets pålitelighet er entydig bestemt av den signerte dominasjonsfunksjonen.
- Vi har typisk at $\delta(A) = 0$ for et stort antall mengder. Formelen over gir derfor et effektivt uttrykk for påliteligheten til systemet.

Rettede nettverkssystemer



Teorem

For rettede nettverkssystemer er:

$$\delta(A) = (-1)^{|A| - v(A) + 1},$$

dersom A er en asyklisk union av minimale stier. I motsatt fall er $\delta(A) = 0$.

– Satyanarayana and Prabhakar, 1978

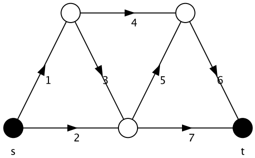
Hovedspørsmål

- Er det mulig å generalisere dominasjonsresultatene til mer generelle strukturer?
- Hva er den essensielle egenskapen ved rettede nettverkssystemer som gjør at dominasjonsresultatene holder?

Signerte mengder

- En signert mengde er en mengde M utstyrt med en funksjon $\sigma_M : M \rightarrow \{+, -\}$, kalt signaturfunksjonen til mengden.
- Signaturfunksjonen σ_M til en signert mengde M definerer en partisjon av M i to delmengder, $M^+ = \{e \in M : \sigma_M(e) = +\}$, $M^- = \{e \in M : \sigma_M(e) = -\}$.
- M^+ og M^- kalles henholdsvis de positive og negative elementene i M.
- Hvis M er en signert mengde med $M^+ = \{e_1, \ldots, e_i\}$ og $M^- = \{f_1, \ldots, f_j\}$, så indikeres dette ved å skrive M som $\{e_1, \ldots, e_i, \overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_j\}$.
- Hvis $M = M^+$ ($M = M^-$), så sies M å være en positiv (negativ) mengde.

Et 2-terminals rettet nettverkssystem



Signerte minimale stimengder mellom s og t:

$$\bar{\mathcal{P}} = \{P_1, \ldots, P_7\}$$

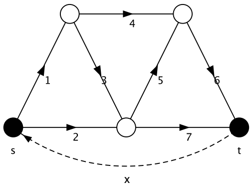
der:

$$P_1 = \{1, 4, 6\},\ P_2 = \{1, 4, \bar{5}, 7\},\ P_3 = \{1, 3, 5, 6\},$$
$$P_4 = \{1, 3, 7\},\ P_5 = \{2, 5, 6\},\ P_6 = \{2, \bar{3}, 4, 6\},\ P_7 = \{2, 7\}$$

Positive minimale stimengder mellom s og t:

$$\mathcal{P} = \{P_1, P_3, P_4, P_5, P_7\}$$

Et utvidet rettet nettverkssystem



La $\mathcal{M}$ betegne familien av alle signerte kretser i det utvidede nettverket. Det ordnede paret $(E \cup x, \mathcal{M})$ kan da vises å være et spesialtilfelle av en såkalt rettet matroide.

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{P}} &= \{(M \setminus x) : M \in \mathcal{M},\ x \in M^+\}, \\
\mathcal{P} &= \{(M \setminus x) : M \in \mathcal{M},\ x \in M^+ \text{ og } (M \setminus x)^- = \emptyset\}.
\end{aligned}$$

Bemerk at $\bar{\mathcal{P}}$ og $\mathcal{P}$ kan avledes fra $(E \cup x, \mathcal{M})$ uten kjennskap til nodestrukturen i nettverket.

Rettede matroider

Definisjon

En rettet matroide er et ordnet par $(F, \mathcal{M})$ der F er en ikke-tom endelig mengde, og $\mathcal{M}$ er en familie av signerte delmengder av F, kalt signerte kretser, og som tilfredsstiller følgende betingelser:

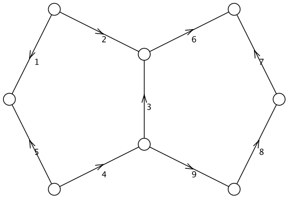
(O1) $\emptyset \notin \mathcal{M}$

(O2) *Hvis $M \in \mathcal{M}$, så er også $(-M) \in \mathcal{M}$.*

(O3) *For alle $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ slik at $M_1 \subseteq M_2$, så er $M_1 = M_2$ eller $M_1 = -M_2$.*

(O4) *Dersom $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ er slik at $M_1 \neq -M_2$, og $e \in M_1^+ \cap M_2^-$, så finnes det en $M_3 \in \mathcal{M}$ slik at $M_3^+ \subseteq (M_1^+ \cup M_2^+) \setminus e$ og $M_3^- \subseteq (M_1^- \cup M_2^-) \setminus e$.*

Geometrisk fortolkning av O4



Signerte kretser i nettverket:

$$M_1 = \{\bar{1}, 2, \bar{3}, \bar{4}, 5\} \qquad M_2 = \{3, 6, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\}$$
$$M_3 = \{\bar{1}, 2, 6, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{4}, 5\}$$

Her er holder O4 siden:

$$M_3^+ = (M_1^+ \cup M_2^+) \setminus 3 = \{2, 6, 5\}$$
$$M_3^- = (M_1^- \cup M_2^-) \setminus 3 = \{\bar{1}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{4}\}$$

Rangen til en (rettet) matroide

La $(F, \mathcal{M})$ være en (rettet) matroid. Matroidens rangfunksjon, betegnet ρ, er da definert for alle $A \subseteq F$ som følger:

$$\rho(A) = \max\{|B| : B \subseteq A,\ M \not\subseteq B,\ \text{for alle } M \in \mathcal{M}\}$$

Hvis $B \subseteq F$ er slik at $M \not\subseteq B$ for alle $M \in \mathcal{M}$, så sies B å være en uavhengig mengde. Rangen til en mengde A er således lik kardinaliteten til den største uavhengige mengden inneholdt i A.

Rangfunksjonen spiller en viktig rolle i generaliseringen av dominasjonsresultatene.

Rettede matroidesystemer

Definisjon

La $(E \cup x, \mathcal{M})$ *være en rettet matroide, og la* (E, ϕ) *være et binært monotont system med minimale stimengder:*

$$\mathcal{P} = \{(M \setminus x) : M \in \mathcal{M},\ x \in M^{+} \text{ og } (M \setminus x)^{-} = \emptyset\}$$

(E, ϕ) *sies da å være et rettet matroidesystem avledet fra den rettede matroiden* $(E \cup x, \mathcal{M})$ *med hensyn på* x*, og vi skriver dette som:*

$$(E \cup x, \mathcal{M}) \rightarrow (E, \phi).$$

En delmengde $A \subseteq E$ *sies å være syklisk dersom det eksisterer en positiv krets* $M \in \mathcal{M}$ *slik at* $M \subseteq A$*. I motsatt fall sies* A *å være asyklisk.*

Dominasjonen til et rettet matroidesystem

Teorem

Hvis $(E \cup x, \mathcal{M}) \rightarrow (E, \phi)$, så er:

$$\delta(A) = (-1)^{|A| - \rho(A \cup x)},$$

dersom A er en asyklisk union av minimale stier. I motsatt fall er $\delta(A) = 0$.

Det kan vises at dersom (E, ϕ) er et rettet nettverkssystem, og A er en asyklisk union av minimale stier, så er $\rho(A \cup x) = v(A) - 1$.

Rettede matrisesystemer

La (E, ϕ) være et binært monotont system.

- For hver $i \in E$ assosierer vi en vektor $\boldsymbol{v}_i$
- La $\boldsymbol{u}$ være en "målvektor"

Vi lar da $\phi(A) = 1$ hvis det finnes $\{\lambda_i \geq 0 : i \in A\}$ slik at:

$$\sum_{i \in A} \lambda_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{u}.$$

I motsatt fall defineres $\phi(A) = 0$.

Dette systemet kan vises å være et rettet matroidesystem. Det funksjonerer hvis og bare hvis den konvekse konen utspent av vektorene $\{\boldsymbol{v}_i : i \in A\}$ inneholder målvektoren.

Rettede matrisesystemer (forts.)

For å identifisere den tilsvarende rettede matroiden, $(E \cup x, \mathcal{M})$, er det bekvemt å innføre $\boldsymbol{v}_x = -\boldsymbol{u}$.

En mengde $A \subseteq E \cup x$ sies å være avhengig (uavhengig) hvis de tilhørende vektorene $\{\boldsymbol{v}_i : i \in A\}$ er lineært avhengige (uavhengige). Familien $\mathcal{M}$ er da gitt av:

$$\mathcal{M} = \text{Familien av minimale avhengige delmengder av } E \cup x$$

Følgelig, hvis $M \in \mathcal{M}$, så finnes $\{\lambda_i \neq 0 : i \in M\}$ slik at:

$$\sum_{i \in M} \lambda_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$$

Videre er de positive og negative elementene i M gitt ved:

$$\begin{aligned} M^+ &= \{i : \lambda_i > 0\} \\ M^- &= \{i : \lambda_i < 0\} \end{aligned}$$

Rettede matrisesystemer (forts.)

La så $M \in \mathcal{M}$ være en positiv krets slik at $x \in M$, og la $P = (M \setminus x)$. Pr. definisjon av den rettede matroiden finnes da $\{\lambda_i \neq 0 : i \in M\}$ slik at:

$$\sum_{i \in M} \lambda_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0},$$

og siden M er positiv, må $\lambda_i > 0$ for alle $i \in M$. Dermed følger det at:

$$\sum_{i \in P} \lambda_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0} - \lambda_x \boldsymbol{v}_x = \lambda_x \boldsymbol{u}$$

Divisjon med den positive størrelsen λ_x på begge sider viser dermed at målvektoren $\boldsymbol{u}$ ligger i den konvekse konen utspent av vektorene $\{\boldsymbol{v}_i : i \in P\}$. Dvs. P er en stimengde for (E, ϕ).

Rettede matrisesystemer (forts.)

Vi minner om at en delmengde $A \subseteq E$ i et rettet matroidesystem (E, ϕ) er asyklisk hvis A ikke inneholder noen positive kretser.

Hvis (E, ϕ) er et rettet matrisesystem med assosierte vektorer $\{\boldsymbol{v}_i : i \in E\}$ og $A \subseteq E$, så kan det vises at A er asyklisk hvis og bare hvis det finnes en vektor $\boldsymbol{\mu}$ slik at:

$$\boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{v}_i > 0, \text{ for alle } i \in A.$$

Følgelig er A asyklisk hvis og bare hvis alle de assosierte vektorene ligger i samme halvrom.

Rettede k-out-of-n systemer

La $|E| = n$, og la $(E \cup x, \mathcal{M})$ være en uniform rettet matroide med rang k, dvs.:

$$\mathcal{M} = \{M \subseteq (E \cup x) : |M| = k + 1\}$$

La så $(E, \bar{\phi})$ være det binære monotone systemet med minimale stimengder:

$$\bar{\mathcal{P}} = \{(M \setminus x) : x \in M^+\} = \{P \subseteq E : |P| = k\}$$

Da er $(E, \bar{\phi})$ et k-av-n system.

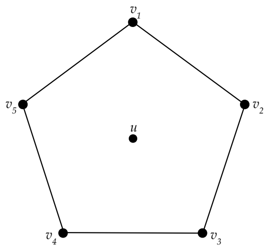
La (E, ϕ) være det binære monotone systemet med minimale stimengder:

$$\mathcal{P} = \{P \in \bar{\mathcal{P}} : P^- = \emptyset\}$$

I så fall sier vi at (E, ϕ) er et rettet k-av-n system.

Eksempel

Betrakt et rettet matrisesystem med 5 komponenter og assosierte vektorer $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_5 \in \mathbb{R}^3$, som alle ligger i første oktant som hjørner i en likesidet femkant, og med målvektoren i sentrum av femkanten.



Her vil ethvert utvalg av tre lineært uavhengige vektorer utspenne hele rommet. Følgelig, hvis vi tillater målvektoren å representeres av en vilkårlig lineær kombinasjon av $\boldsymbol{v}_i$-er, uten å ta hensyn til fortegnene til λ_i-ene, så får vi et 3-av-5 system.

Eksempel (forts.)

Skrevet som signerte mengder svarer dette til følgende 10 minimale stimengder:

$$P_1 = \{1, 2, 4\},\ P_2 = \{2, 3, 5\},\ P_3 = \{1, 3, 4\},\ P_4 = \{2, 4, 5\},$$
$$P_5 = \{1, 3, 5\},\ P_6 = \{1, \bar{2}, 3\},\ P_7 = \{2, \bar{3}, 4\},\ P_8 = \{3, \bar{4}, 5\},$$
$$P_9 = \{1, 4, \bar{5}\},\ P_{10} = \{\bar{1}, 2, 5\}.$$

Det tilsvarende rettede k-av-n systemet (E, ϕ) vil dermed få følgende minimale stimengder:

$$\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_5\}$$

Siden alle de assosierte vektorene ligger i første oktant, ligger de også i samme halvrom. Følgelig er E en asyklisk union av minimale stimengder, og vi får:

$$\delta(E) = (-1)^{|E| - \rho(E \cup x)} = (-1)^{5-3} = 1.$$

Oppsummering

I denne presentasjonen har vi:

- Introdusert klassen av rettede matroidesystemer
- Antydet at de klassiske dominasjonsresultatene kan generaliseres til denne klassen
- Introdusert noen eksempler på rettede matroidesystemer
  - Rettede matrisesystemer
  - Rettede k-av-n systemer

Fremtidig arbeid:

- Utforske klassen av rettede matroidesystemer videre:
  - Duale matroidesystemer
  - Generalisering av flerterminals rettede nettverkssystemer
  - Partielt rettede matroidesystemer
- Konkrete anvendelser av resultatene i pålitelighetsberegninger