UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	STK4500 — Livsforsikring og finans.
Eksamensdag:	Mandag 8. juni 2015
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1. (10 poeng)

Betrakt en permanent uføreforsikringsmodell (permanent disability model). I denne modellen er tilstandene av forsikringstakeren $X_t \in S$ modellert ved hjelp av en regulær Markovkjede med tilstandsrom $S = \{*, \diamondsuit, \dagger\}$, hvor $*$ ="aktiv", $\diamondsuit$ ="uføre"og $\dagger$ =død".
La oss anta at overgangsratene (transition rates) i denne modellen er gitt ved følgende konstanter:

$$\mu_{*\diamondsuit}(t) = 0.002, \mu_{*\dagger}(t) = 0.0045, \mu_{\diamondsuit\dagger}(t) = \mu_{*\dagger}(t).$$

(i) Finn en eksplisitt formel for overgangssannsylighetene (transition probabilities) $p_{ij}(s,t), i, j \in S$.

(ii) Regn ut $p_{**}(x, x+20)$ and $p_{*\diamondsuit}(x, x+20)$ for $x = 40$ (år).

Oppgave 2. (10 poeng)

En 10−år-risikoforsikring med investeringsvalg (10−year unit-linked term insurance) blir solgt til en 55 år gammel forsikringstaker. Engangspremien er $P = 12500\$$. Det er gebyrer rett ved begynnelsen av kontrakten på 3% som trekkes fra P og resten av premien blir investert i en fond (f.eks, equity fund). Anta at tidsdynamikken av fondsverdien S_t er beskrevet av Black-Scholes-modellen, hvor $S_0 = 1$. I tillegg til det, er det forvaltningsgebyrer på $\beta = 0.4\%$ per år som trekkes fra kontoen av forsikringstakeren på daglig basis (dvs. i form av et kontinuerlig fratrekk m.h.p. diskonteringsfaktoren $e^{-\beta t}$). Ved denne kontrakten blir 125% av fondsverdien utbetalt, hvis forsikringstakeren dør innen kontraktperioden.
Anta at
(i) overgangsraten (transition rate) er konstant og gitt ved

$$\mu_{*\dagger}(t) = 0.011$$

(Fortsettes på side 2.)

(ii) den risikorie renten (risk free rate of interest) er $r = 3\%$ per år (kontinuerlig diskontering).
(iii) volatiliteten av S_t er $\sigma = 25\%$ per år.

Regn ut den prospektive reserven av forsikringsutbetalingene (benefits) på tidspunkt $t = 0$.

Oppgave 3. (10 poeng)

La oss se på en 10-år pure endowment (opplevelsesforsikring). Forsikringstakeren er 45 år gammel ved tegning av kontrakten. Ved denne forsikringsformen blir det utbetalt et beløp på 130000\$ (endowment amount) på slutten av kontraktperioden, hvis forsikringstakeren overlever kontraktperioden. Anta for denne policen stokastiske renter $r(t)$ beskrevet av Vasicek-modellen med parametrene $r(0) = 0.025, a = 0.4, b = 0.035$ og $\sigma = 0.01$. La $\lambda = -1$ (risikopremie) og

$$\mu_{*\dagger}(t) = 0.004$$

være den konstante overgangsraten (transition rate).

Regn ut den prospektive reserven av forsikringsutbetalingene (endowment payment) på tidspunkt $t = 0$.

Oppgave 4. (10 poeng)

Betrakt en permanent uførepensjonsforsikring (permanent disability insurance). La $x = 55$ år være alderen av den friske forsikringstakeren i begynnelsen av kontrakten. Løpetiden på kontrakten er 2 år og det er kontinuerlig innbetaling av premier over hele kontraktperioden så lenge forsikringstakeren er frisk. Den årlige uførepensjonsutbetalingen (disability benefit) er gitt ved 50000\$. Anta at overgangssannsynlighetene (transition probabilities) er gitt ved

$$\begin{aligned} p_{**}(55, 55+t) &= \frac{2}{3}\exp(-0.015t) + \frac{1}{3}\exp(-0.01t), \\ p_{*\dagger}(55, 55+t) &= 1 - \exp(-0.01t). \end{aligned}$$

(i) Anta at $\delta = 3.5\%$ (renteintensitet eller interest rate intensity) og bruk ekvivalensprinsippet til å regne ut de årlige premiene P.

(ii) La $B_t, 0 \le t \le T$ være en $1-$dimensjonal Brownsk bevegelse. Finn sannsynlighetstettheten av

$$X \stackrel{def}{=} \int_0^T B_s ds.$$

Oppgave 5. (6 poeng)

Betrakt et (1-dimensjonalt) Black-Scholes-marked med en konstant markedsrente r og en aksje med en aksjeprisdynamikk $S_t^{(1)}$ som er beskrevet av

$$S_t^{(1)} = x + \int_0^t \mu S_u^{(1)} du + \int_0^t \sigma_1 S_u^{(1)} dB_u, 0 \le t \le T,$$

(Fortsettes på side 3.)

hvor $B_t, 0 \leq t \leq T$ er en Brownsk bevegelse og $\mu \in \mathbb{R}, \sigma_1 > 0$ er konstanter. Dessuten, la oss se på en aksjeprisprosess $S_t^{(2)}$ som er gitt ved

$$dS_t^{(2)} = x + \int_0^t \mu S_u^{(2)} du + \int_0^t \sigma_2 S_u^{(2)} dB_u, 0 \leq t \leq T$$

m.h.p. et annet Black-Scholes-marked med en konstant markedsrente r, hvor $\sigma_2 > \sigma_1$ er en konstant. La p_i være den arbitrasjefrie prisen av en europeisk kjøpsopsjon på tidspunkt $t = 0$ med forfallsdato T (maturity) og strike-pris K på en enhet av $S_T^{(i)}$ for $i = 1, 2$.
La oss nå anta at aksjeprisprosessen S_t på et Black-Scholes-marked med en konstant markedsrente r tilfredsstiller

$$S_t = x + \int_0^t \mu S_u du + \int_0^t \widetilde{\sigma}(u) S_u dB_u, 0 \leq t \leq T,$$

hvor volatiliteten er *stokastisk* og modellert ved hjelp av en adaptert stokastisk prosess $\widetilde{\sigma}(t), 0 \leq t \leq T$ slik at $\sigma_1 \leq \widetilde{\sigma}(t) \leq \sigma_2$ for alle t.
Prisen p på tidspunkt $t = 0$ av en europeisk kjøpsopsjon med forfallsdato T og strike-pris K av S_T kan defineres som

$$p = E_{P^*}[e^{-rT} \max(0, S_T - K)],$$

hvor P^* er det sannsynlighetsmålet slik at den diskonterte aksjeprosessen blir en martingal.
Vis at

$$p \in [p_1, p_2].$$

Hint: Black-Scholes partiell differensiallikning:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t}(t,x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t,x) + rx \frac{\partial C}{\partial x}(t,x) - rC(t,x) &= 0, t \in [0,T), x > 0 \\ C(T,x) &= f(x). \end{aligned}$$

Slutt

(Fortsettes på side 4.)

Vedlegg: Formelark

a) Forlengs-Kolmogorov-likning:

$$\frac{d}{dt}p_{ij}(s,t) = -p_{ij}(s,t)\mu_j(t) + \sum_{k\neq j} p_{ik}(s,t)\mu_{kj}(t), i,j \in S$$

med $p_{ij}(s,s) = 0$, hvis $i \neq j$, $p_{ij}(s,s) = 1$, hvis $i = j$, hvor $\mu_j(t) = \sum_{k\neq j} \mu_{jk}(t)$.

b)

$$p_{jj}(s,t) = \overline{p}_{jj}(s,t) = \exp(-\sum_{k\neq j}\int_s^t \mu_{jk}(u)du), j \in S.$$

c) Prospektiv reserve (i kontinuerlig tid):

$$\begin{aligned} V_j^+(t) &= \frac{1}{v(t)}\{\sum_{g\in S}\int_{(t,\infty)} v(s)p_{jg}(t,s)da_g(s) \\ &\quad + \sum_{g\in S}\int_{(t,\infty)} v(s)p_{jg}(t,s)(\sum_{\substack{h\in S,\\ h\neq g}} a_{gh}(s)\cdot\mu_{gh}(s))ds\}, \end{aligned}$$

for $j \in S$, hvor $a_i(t)$ (pension payments) og $a_{ij}(t)$ (benefit payments) er betalingsfunksjoner.

d) Black-Scholes-modell:

$$S_t = x + \int_0^t \mu S_u du + \int_0^t \sigma S_u dB_u, 0 \leq t \leq T,$$

hvor $\sigma \neq 0$ og μ er konstanter og hvor $B_t, 0 \leq t \leq T$ er en Brownsk bevegelse.

e) Prisingsformel for opsjoner (contingent claims) X:

$$\begin{aligned} ClaimValue_t &= E_{\widetilde{P}}[e^{-(T-t)\cdot r}X\,|\mathcal{G}_t]\,, 0 \leq t \leq T \\ ClaimValue_0 &= E_{\widetilde{P}}[e^{-(T-t)\cdot r}X], \end{aligned}$$

hvor $\widetilde{P}$ (equivalent martingale measure) er et sannsynlighetsmål slik at $\widetilde{S}_t = e^{-rt}S_t, 0 \leq t \leq T$ (m.h.p. Black-Scholes-modellen) er en martingal med hensyn på $\widetilde{P}$.

f) Vasicek-modell:

$$r(t) = x + \int_0^t a(b - r(u))du + \sigma B_t$$

for konstanter a, b og σ, som ikke er negative.

(Fortsettes på side 5.)

g) Obligasjonsverdi (bond value) på tidspunkt $t = 0$ (m.h.p. Vasicek-modellen):

$$P(0,T) = \exp(-TR(T, r(0))),$$

hvor

$$\begin{aligned} & R(s,x) \\ = \quad & (b-(\lambda\sigma)/a-\frac{\sigma^2}{2a^2})-\frac{1}{a\cdot s}[((b-(\lambda\sigma)/a-\frac{\sigma^2}{2a^2})-x)(1-e^{-as})-\frac{\sigma^2}{4a^2}(1-e^{-as})^2]. \end{aligned}$$

h) Sannsynlighetstetthet f av X:

$$P(X \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f(z)dz$$

for alle y.

i) Europeisk kjøpsopsjon:

$$\max(0, S_T - K)$$