

# Prosjektoppgave STK4500

## Vårsemester 2004

### Linda Kopp

Vi ser på en lukket bestand bestående av personer som har samme alder, samme lønnsutvikling og som har en ytelsesbasert pensjonsordning. De er 30 år gamle og skal gå av med pensjon om 35 år.

Vi skal se på to ordninger. I den ene ordningen er avkastningen på premiereserven bestemt av en indexportefølje. I den andre ordningen forrentes premiereserven med en garantert avkastning og forsikrede får i tillegg en andel av meravkastningen hvis den er positiv.

Indexporteføljen er antatt å bestå av aksjer, kortrentepapirer og lengrentepapirer som følger Wilkie modellen. Startlønnen er 300.000.

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`  
<< Graphics`Legend`  
<< Graphics`Graphics`
```

#### Parametersetting :

```
{ai, ay, ar, af} = {.58, .55, .90, .74};  
{adi, ari} = {.87, .96};  
{oi, oy, or, of, od} = {.04, .16, .19, .18, .07};  
{bd1, bdi0, bdi1} = {.57, .50, -.36};  
{ody, ory, oyi} = {-.03, .05, 1.79};  
{xi, xy, xr, xf, xd} = {.048, .04, .03, .80, .07};  
i0 = 0.02;  
l = 0.015;  
o1 = 0.01;  
lønn = 500000;  
x = 30;  
n = 35;  
w = 120;  
k = 35;  
{alpha, beta, c} = {0, 0.0000202, 1.1015};  
i1 = 0.03;  
xi = 0.7;  
v =  $\frac{1}{1 + i1}$ ;  
lambda = 0.03;  
theta = 0.015;  
mu = 0.057;  
sigma = 0.056;
```

```

p[y_, t_] := e-(a t +  $\frac{\beta c^y (c^t - 1)}{\text{Log}[c]}$ );
px = Table[p[x, t], {t, 0, n - 1}];
a[t_] :=  $\sum_{j=n-t}^{w-(x+t)} v^j p[x + t, j]$ ;
at = Table[a[t], {t, 0, n - 1}];

```

## Andelen av aksjer og renter :

**x1** er andelen av indexporteføljen som er investert i aksjer, **x2** andelen investert i kortrentepapirer og **x3** er andelen investert i langrentepapirer.

```

x1 = 1 / 3;
x2 = 1 / 3;
x3 = 1 - x1 - x2;

```

## Simulering av normalfordelte $\varepsilon$ som inngår i Wilkie – modellen :

```

nSim = 1000;
ranEi = Partition[RandomArray[NormalDistribution[0, 1], nSim k], k];
ranEk1 = Partition[RandomArray[NormalDistribution[0, 1], nSim k], k];
ranEy = Partition[RandomArray[NormalDistribution[0, 1], nSim k], k];
ranEf = Partition[RandomArray[NormalDistribution[0, 1], nSim k], k];
ranEr = Partition[RandomArray[NormalDistribution[0, 1], nSim k], k];
ranEa = Partition[RandomArray[NormalDistribution[0, 1], nSim k], k];
ranEd = Partition[RandomArray[NormalDistribution[0, 1], nSim k], k];

```

## Simulering av lønnutviklingen, premiereserven, faktisk utvikling av premiereserven uten avkastningsgaranti, faktisk utvikling av premiereserven med avkastningsgaranti og avkastningen av porteføljen :

```

lktest = lønnsutvikling
s = aksjekurs
d = dividende
simA = simulert avkastning på indexporteføljen
simS = ytelse
simP = premie
simVt = nødvendig premiereserve
simFt = faktisk utvikling av premiereserve uten avkastningsgaranti
simFtG = faktisk utvikling av premiereserve med avkastningsgaranti
innbettest = nødvendig innbetaling (uten avkastningsgaranti)
innbettestG = nødvendig innbetaling (med avkastningsgaranti)
Avkastningen på aksjekursen er definert som (s (t) + d (t)) / s (t - 1) .
De nødvendige innbetalingene er definert som differansen mellom
nødvendig premiereserve og den faktiske utviklingen av premiereserven.

```

```

simlønntest[sim_] := Module[{zi, i, zkl, ikl, lktest, simS},
  zi = Delete[FoldList[ai #1 + oi #2 &, Log[ $\frac{1+i0}{1+\xi i}$ ], ranEi[sim]], 1];
  i = (1 + xi) ezi - 1;
  zkl = ol ranEkl[sim];
  ikl = i + 1 + zkl;
  lktest = FoldList[#1 (1 + #2) &, lønn, ikl];
  q = FoldList[(1 + #2) #1 &, 1, i];
  zy = Delete[FoldList[ay #1 + oy #2 &, 0, ranEY[sim]], 1];
  zdy = od (ranEd[sim] + bd1 Prepend[Delete[ranEd[sim], -1], 0]) +
    edy Prepend[Delete[ranEY[sim], -1], 0];
  zdi = Delete[FoldList[adi #1 + (bdi0 #2[[1]] + bdi1 #2[[2]]) &,
    0, Transpose[{zi, Prepend[Delete[zi, -1], 0]}]], 1];
  y = Prepend[xi ezy+oyi zi, xi];
  id = (1 + xi d) ezdy+zdi - 1;
  d = FoldList[(1 + #2) * #1 &, y[[1]], id];
  s =  $\frac{d}{y}$ ;
  zf = Delete[FoldList[af #1 + of #2 &, 0, ranEf[sim]], 1];
  zry = Delete[FoldList[ar #1 + or #2[[1]] + 0ry #2[[2]] &,
    0, Transpose[{ranEr[sim], ranEY[sim]}]], 1];
  zri = Delete[FoldList[ari #1 + (1 - ari) #2 &, 0, zi], 1];
  rT = xi r ezry + xi i + zri;
  f = xi f ezr;
  r = f rT;
  rAkk = FoldList[#1 #2 &, 1, 1 + r];
  simA = Table[x1  $\frac{s[[t+1]] + d[[t+1]]}{s[[t]]}$  + x2 (1 + rT[[t]]) + x3 (1 + r[[t]]), {t, 1, n}];
  simS = 0.2 lktest;
  simP = Prepend[Table[ $\left(\frac{(t+1) \text{simS}[[t+1]]}{n} - \frac{t \text{simS}[[t]]}{n}\right)$  at[[t+1]], {t, 1, n-1}],
     $\frac{\text{simS}[[1]] \text{at}[[1]]}{n}$ ];
  simVt = Table[{t,  $\frac{(t+1) \text{simS}[[t+1]] \text{at}[[t+1]] \text{px}[[t+1]]}{n}$ }, {t, 0, n-1}];
  simFt = Table[{t+1, simVt[[t+1, 2]] simA[[t+1]]}, {t, 0, n-1}];
  simFtG = Table[
    {t+1, simVt[[t+1, 2]] ((1 + i1) + xi Max[0, simA[[t+1]] - (1 + i1)])}, {t, 0, n-1}];
  innbetteest = Prepend[Table[simVt[[t+1, 2]] - simFt[[t, 2]], {t, 1, n-1}], simP[[1]];
  innbetGtest = Prepend[Table[simVt[[t+1, 2]] - simFtG[[t, 2]], {t, 1, n-1}], simP[[1]];
  {lktest, innbetteest, innbetGtest, simA}];

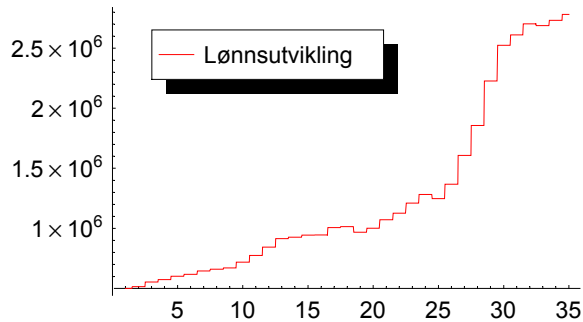
simulering = simlønntest[7];

```

Følgende plot viser lønnsutvikling fra nå og 35 år frem i tid for simulering nr 7 :

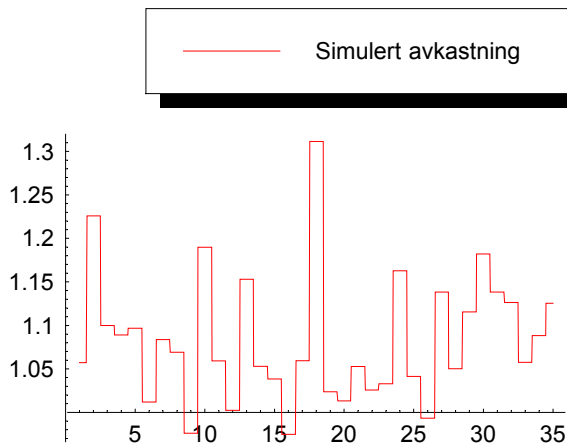
```
plot1 = Plot[simulering[[1, Round[m]]], {m, 1, 35}, PlotRange → All,
  DefaultFont → {"Helvetica", 11}, PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0],
  PlotLegend → {"Lønnsutvikling"}, LegendPosition → {-.5, .3}, LegendTextSpace → 5];
```

Part::pspec : Part specification Round[m] is neither an integer nor a list of integers. MORE...



**I neste plot vises simulert avkastning  
fra nå og 35 år fremover for simulering nr 7 :**

```
plot3 = Plot[simulering[[4, Round[k]]],
  {k, 1, 35}, PlotRange → All, DefaultFont → {"Helvetica", 11},
  PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0], PlotLegend → {"Simulert avkastning"},
  LegendPosition → {-.5, 0.7}, LegendSize → {1.5, 0.3}];
```



```
Mean[Table[simulering[[4, Round[k]]], {k, 1, 35}]]
```

1.08337

**Neste plot viser to baner for faktisk nødvendig innbetaling med og uten garanti :**

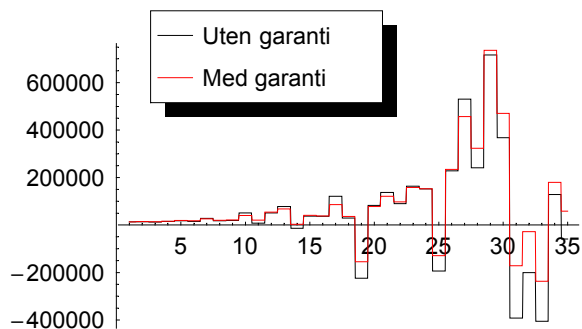
```
plot2 = Plot[{simulering[[2, Round[m]]], simulering[[3, Round[m]]],
  {m, 1, 35}, PlotRange -> All, DefaultFont -> {"Helvetica", 11}, PlotStyle ->
  (RGBColor[#1, 0, 0] &) /@ {0, 1}, PlotLegend -> {"Uten garanti", "Med garanti"},
  LegendPosition -> {-.5, .3}, LegendTextSpace -> 5];
```

Part::pspec : Part specification Round[m] is neither an integer nor a list of integers. More...

Part::pspec : Part specification Round[m] is neither an integer nor a list of integers. More...

Part::pspec : Part specification Round[m] is neither an integer nor a list of integers. More...

General::stop : Further output of Part::pspec will be suppressed during this calculation. More...



**Nødvendige innbetalinger varierer fra år til år for både ordninger med og uten garanti. Variasjonene er små i de første femten årene av innbetalingsperioden, mens de i de neste tyve årene svinger kraftig. I noen år er til og med innbetalingene negative.**

**Forskjellen mellom nødvendig innbetaling med og uten garanti liten er liten i de første tyve årene, men blir større i de siste femten årene av innbetalingsperioden.**

**I neste trinn foretas simuleringen 1000 ganger. For å se på spredningen av de simulerte innbetalingene lages en trakt hvor 5 % av de simulerte innbetalingene ligger over og 5 % ligger under på hvert fremtidig tidspunkt.**

```
Timing[innbetTab = Table[simlønntest[j], {j, nSim}];]
```

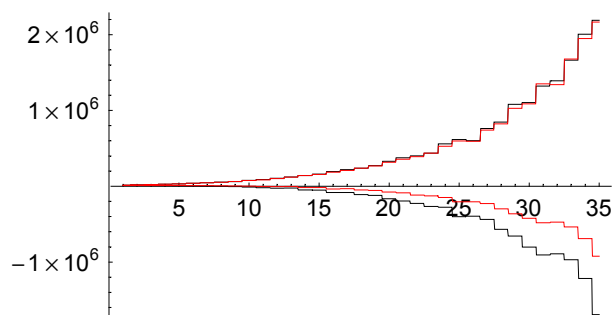
```
{7.901 Second, Null}
```

```
trakt = ({Take[Sort[#1], {0.05 nSim}], Take[Sort[#1], {0.95 nSim}]} &) /@
  Transpose[Transpose[innbetTab] [[2]]];
traktG = ({Take[Sort[#1], {0.05 nSim}], Take[Sort[#1], {0.95 nSim}]} &) /@
  Transpose[Transpose[innbetTab] [[3]]];
```

General::spell1 :

Possible spelling error: new symbol name "traktG" is similar to existing symbol "trakt". More...

```
plot2 = Plot[{trakt[Round[k], 1], trakt[Round[k], 2],
  traktG[Round[k], 1], traktG[Round[k], 2]}, {k, 1, 35}, PlotRange -> All,
  DefaultFont -> {"Helvetica", 11}, PlotStyle -> (RGBColor[#1, 0, 0] &) /@ {0, 0, 1, 1}];
```



**Traktene utvider seg for hvert år. Mot slutten av innbetalingsperioden utvider den seg nesten eksponensielt. Det betyr at usikkerheten for hvordan innbetalingen blir øker for hvert år.**

**For å finne ut om avkastningsgarantien er lønnsom for de forsikrede skal vi se på sannsynlighetsfordelingen til kontantverdiene av innbetalingsstrømmene. Innbetalingsstrømmene blir neddiskontert med den faktiske avkastningen.**

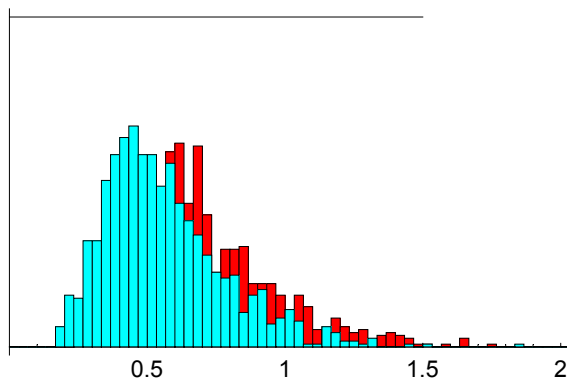
```
kontantVerdi = Table[
  innbetTab[[j, 2]].Delete[FoldList[#2 #1 &, 1,  $\frac{1}{\text{innbetTab}[[j, 4]]}$ ], n], {j, 1, nSim}];
kontantVerdiG = Table[innbetTab[[j, 3]].
  Delete[FoldList[#2 #1 &, 1,  $\frac{1}{\text{innbetTab}[[j, 4]]}$ ], n], {j, 1, nSim}];
```

General::spell11 : Possible spelling error: new symbol  
name "kontantVerdiG" is similar to existing symbol "kontantVerdi". More...

```

plot4 =
Show[Histogram[ $\frac{\text{kontantVerdiG}}{10^6}$ , HistogramCategories → Table[i / 30, {i, 0, 1000}],
HistogramRange → {0, 2}, DisplayFunction → Identity],
Histogram[ $\frac{\text{kontantVerdi}}{10^6}$ , HistogramCategories → Table[i / 30, {i, 0, 1000}],
HistogramRange → {0, 2}, DisplayFunction → Identity,
BarStyle → RGBColor[0, 1, 1]], Plot[115, {x, 0, 1.5}, DisplayFunction → Identity],
DisplayFunction → $DisplayFunction, DefaultFont → {"Helvetica", 11},
Ticks → {Automatic, False}];

```

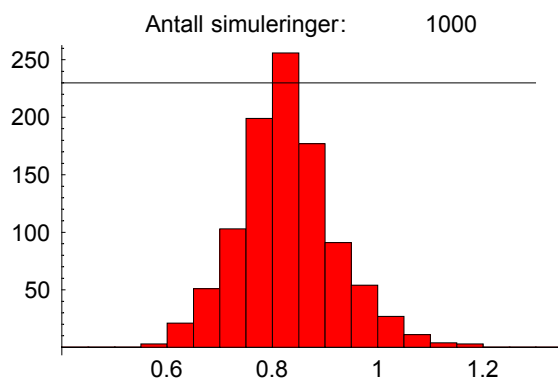


**Histogrammet viser at kontantverdiene til innbetalingene uten garanti er lavere enn for de med garanti i de fleste intervaller. Begge ordningene har også noen få veldig store kontantverdier, ordningen med garanti har flest.**

**Dette tyder på at avkastningsgarantien ikke er lønnsom fordi man betaler inn mer men får tilbake samme ytelse.**

**Neste plot viser sannsynlighetsfordelingen til forholdstallet mellom kontantverdier med og uten garanti :**

```
Show[Histogram[ $\frac{\text{kontantVerdi}}{\text{kontantVerdiG}}$ [[Range[#1]]],
  DefaultFont -> {"Helvetica", 11}, HistogramCategories -> Table[ $\frac{i}{20}$ , {i, 0, 100}],
  HistogramRange -> {0.4, 1.3}, DisplayFunction -> Identity],
Plot[230, {x, 0.4, 1.3}, DisplayFunction -> Identity],
DisplayFunction -> $DisplayFunction, PlotLabel ->
"Antall simuleringer:\t" <> ToString[#1] ] & /@ Range[1000, nSim, 1000];
```



**Histogrammet viser at for de fleste simuleringer er kontantverdien til innbetalingene uten garanti mindre enn for de med garanti. Det gir samme konklusjon som for forrige histogram, nemlig at det ikke lønner seg å ha en ordning med garantert avkastning .**

Generelle kommentarer til innleveringsoppgaven:

- > Vi kan risikere at innbetalinger med garanti blir høyere enn innbetalinger uten garanti, fordi ikke hele avkastningen tilfaller kunden når vi har garanti.
- > For å oppnå rettferdighet, bør trakten med garanti være en "symmetrisk innsnevret" utgave av trakten uten garant.
- > Assymetrien med våre parametre skyldes antaglig først og fremst ekstremutslag i lønnsutviklingen.