15 Optimalisering av investeringsporteføljer med risikofritt investeringsalternativ.

I denne oppgaven ser vi på en situasjon der investeringsuniverset utvides med et risikofritt investeringsalternativ. Begreps- og notasjonsmessig bruker vi samme beskrivelse som opprinnelig for de n investeringsalternativene som det er knyttet usikkerhet til:

R_i =Verdi ved slutten av perioden av én enhet investert i eiendel $i; i = 1, ..., n$
$\mu_i = E(R_i); i = 1, ..., n$
$V_{ij} = Cov(R_i, R_j); i, j = 1, ..., n$
$\mu =^t (\mu_1, ..., \mu_n)$
$V = \{V_{ij}\}_{i,j=1,...,n}$

Vi benevner det risikofrie investeringsalternativ som "alternativ 0", og lar R_0 betegne (den deterministiske) verdien ved slutten av perioden av én enhet investert i dette alternativet.

Som i tilfellet uten et risikofritt investeringsalternativ ser vi på optimalisering av investeringsporteføljen på følgende måte: Gitt 1) én enhet til disposisjon til å foreta investeringer og 2) et valgt forventet avkastningsnivå, r, skal vi sette sammen porteføljen av de $(n + 1)$ investeringsalternativene på en slik måte at variansen til verdien ved slutten av perioden blir minst mulig.

Formuler optimaliseringsproblemet stringent matematisk, og still opp Lagrangefunksjonen til å løse optimeringen.

15.1

For de optimale andeler investert i henholdsvis eiendel 0 og eiendelene $1, ..., n$ innfører vi notasjonen $\widehat{x}_0$ og $\widehat{x} =^t (\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n)$. Vis at $\widehat{x}_0$, $\widehat{x}$ og Lagrangemultiplikatorene 2λ og 2ν må tilfredsstille:

1) $V\widehat{x} - \lambda e - \nu\mu = 0$
2) $\lambda + \nu R_0 = 0$
3) $\widehat{x}_0 R_0 +^t \widehat{x}\mu = r$
4) $\widehat{x}_0 +^t \widehat{x}e = 1$

der vi har benyttet notasjonen $e =^t (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$.

15.2

Vis at $\widehat{x}$ må tilfredsstille:

$V\widehat{x} = \nu(\mu - R_0 e)$

15.3

Vis at:
$var\,(R\,(\widehat{x})) = \nu\,(r - R_0)$
og:
$Cov\,(R_i, R\,(\widehat{x})) = \nu\,(\mu_i - R_0)\,; i = 1, ..., n$

15.4

Vis at:
$(\mu_i - R_0) = \frac{Cov(R_i, R(\widehat{x}))}{var(R(\widehat{x}))}\,(r - R_0)\,; i = 1, ..., n$
og uttrykk i ord hva denne relasjonen gir uttrykk for.

Dette er en sentral sammenheng i CAPM (Capital Asset Pricing Model). Her kalles gjerne $\frac{Cov(R_i, R(\widehat{x}))}{var(R(\widehat{x}))}$ for enkeltpapirets β, og kan tolkes som et uttrykk for hvor kurssensitivtet enkeltpapir er, sammenlignet med markedet som helhet.