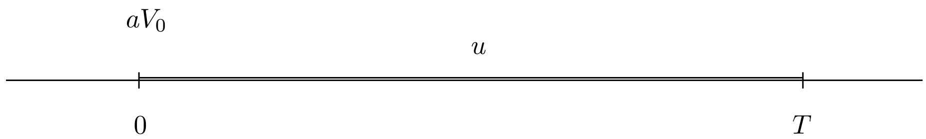
UNIVERSITETET I OSLO
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet STK4500 v2005: Finans og forsikring
Prosjektoppgave, utlevering fredag 10. juni kl. 09, innlevering tirsdag 14. juni kl. 15.

Boligpensjon utstedes av en bank og utbetales som en kombinasjon av engangsbeløp ved pensjonering og livsvarige utbetalinger. Pensjonsutbetalingene kan betraktes som et lån - mot sikkerhet i en bolig - som skal betales tilbake ved å trekke den akkumulerte lånesaldoen fra boligens verdi, når pensjonisten dør. Dersom den akkumulerte lånesaldoen overstiger boligens verdi, må banken dekke tapet. Vi skal i denne oppgaven studere risikomessige aspekter ved boligpensjon fra bankens ståsted. Alle beregninger gjøres vha kontinuerlig tids matematikk, om ikke annet er spesifisert.

$$
\begin{aligned}
V_t &= \text{boligens verdi på tid } t \\
L_t &= \text{lånesaldo uten margin på tid } t \\
L_{t,m} &= \text{lånesaldo med margin på tid } t \\
G_t &= \text{bankens neddiskonterte gevinst ved død på tid } t \\
g &= \text{prisvekst per år på boligen} \\
a &= \text{engangsutbetaling målt i } V_0 \\
u &= \text{årlig utbetalingsintensitet} \\
i &= \text{lånerente uten margin (bankens innlånsrente)} \\
m &= \text{margin (bankens utlånsrente } i+m\text{)}
\end{aligned}
$$

Merk: Den faktiske engangsutbetalingen blir aV_0. Et annet navn for parameteren a kan være initiell belåningsgrad.



a) Vis at lånesaldo uten margin kan skrives på formen

$$
\begin{aligned}
L_t &= k_1 \cdot (1+i)^t - k_2 \qquad (1)\\
k_2 &= \frac{u}{\log(1+i)} \\
k_1 &= a \cdot V_0 + k_2
\end{aligned}
$$

Bankens neddiskonterte gevinst ved avgang på tid t er

$$G_t = \begin{cases} (1+i)^{-t} \cdot (L_{t,m} - L_t) & , \quad V_t > L_{t,m} \\ (1+i)^{-t} \cdot (V_t - L_t) & , \quad V_t \leq L_{t,m} \end{cases} \tag{2}$$

Anta avtalen om boligpensjon er inngått av en $x-$åring. Pensjonen utbetales helt til pensjonisten dør, dvs. med varighet T_x. Sannsynlighetstettheten for gjenstående utbetalingstid er

$$f(\tau) = \mu_{x+\tau} \cdot {}_\tau p_x \tag{3}$$

Før vi går i gang med boligpensjon, må vi ha et oppdatert dødelighetsgrunnlag. Vi skal finne maksimum likelihood (ML) estimater til parametre β og c i intensiteten

$$\mu_{x+t} = \beta c^{x+t} \tag{4}$$

basert på SSB-dataene 'Befolkningsdødlighet2004.txt'. I denne filen tar vi utgangspunkt i en bestand på 100 tusen nyfødte personer og ser på hvor mange som dør fra denne bestanden hvert år og hvor mange som er igjen:

Kolonne	Forklaring
1	Alder
2	Antall menn som fortsatt er i live i denne alderen
3	Antall kvinner som fortsatt er i live i denne alderen
4	Antall menn som dør i denne alderen
5	Antall kvinner som dør i denne alderen

For enkelthets skyld antar vi de som dør det første året blir 0.5 år gamle osv. Anta vi har n observasjoner av realisasjoner av T_x.

b) Vis at log −likelihood funksjonen til en $x-$åring kan skrives på formen

$$l(\beta, c) = n\log(\beta) + \log(c)\left(nx + \sum_{j=1}^{n} t_j\right) - \frac{\beta c^x}{\log(c)}\left(\sum_{j=1}^{n} c^{t_j} - n\right) \tag{5}$$

c) Vis at

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\beta} l &= 0 \Longleftrightarrow \beta(c) = \frac{n\log(c)}{c^x(\sum_{j=1}^{n} c^{t_j} - n)} \qquad (6) \\ \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} l &= -\frac{n}{\beta^2} < 0 \end{aligned}$$

Siden boligpensjon er et produkt som er rettet mot eldre mennesker, vil vi tilpasse dødelighetsgrunnlaget til aldersgruppen fra 60 år og oppover.

d) Anta $x = 60$ og lag et plott av $l(\beta(c), c)$ som viser at funksjonen maksimeres for $c = 1.120$ for menn og $c = 1.141$ for kvinner, når $c \in (1.10, 1.16)$.

e) Lag et plott som viser dataene og den tilpassete sannsynlighetstettheten med ML-parametre.

Videre i oppgaven skal vi ta for oss en mann med dødsintensitet gitt av $(\beta, c) = (8.15581 \cdot 10^{-6}, 1.12)$. Bankens forventete neddiskonterte gevinst er

$$EG_T = \int_0^\infty G_\tau \cdot f(\tau)\ d\tau \tag{7}$$

For den numeriske integrasjonen kan det være lurt å dele opp integralet i to deler, en før og en etter bruddpunktet til G_t. Banken ønsker å legge antagelsene om økonomisk utvikling til den sikre siden og bruker parametrene

$$\begin{aligned} g &= 0.03 \\ i &= 0.05 \\ m &= 0.02 \end{aligned}$$

Vi antar dessuten at

$$\begin{aligned} V_0 &= 3000000 \\ x &= 67 \end{aligned}$$

f) Finn hvilken u avrundet til hele 1000 kr som maksimerer EG_T, når $a = 0$.

g) Finn hvilken a avrundet til hele prosent som maksimerer EG_T, når $u = 0$.

h) Anta $a = 0$ og $u = 100000$. Hva blir $\Pr\{V_T < L_{T,m}\}$ og $\Pr\{G_T < 0\}$?

i) Anta $a = 0$ og $u = 130000$. Bruk stokastiske trekninger av levetider T_j til å regne ut $\Pr\{\sum_{j=1}^{n} G_{T_j} < 0\}$, dersom $n \in \{1, 2, ..., 10\}$ menn inngår avtale om boligpensjon. Kommenter.

Hittil har vi ikke tatt hensyn til finansiell usikkerhet i våre beregninger. I resten av oppgaven går vi over til diskret tids matematikk og bruker simulering som verktøy. Anta a utbetales på tid 0, mens u utbetales årlig etterskuddsvis. Vi bruker Vasiceks modell for bankrenten uten margin r_t :

$$\begin{aligned}
r_t &= r_{t-1} + \gamma(\xi - r_{t-1}) + \sigma\varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim N(0,1) \\
\xi &= 0.05 \\
\gamma &= 0.10 \\
\sigma &= 0.01 \\
r_0 &= 0.02 \\
L_t &= L_{t-1} \cdot (1 + r_t) + u,\ L_0 = a \cdot V_0
\end{aligned}$$

j) Lag en graf som viser 5 simulerte baner for $r_t,\ t \in \{0, 1, 2, ..., 30\}$.

k) Hva er sannsynligheten for negativ rente i løpet av en 30-års periode? Er rentemodellen rimelig?

l) Hva er sannsynligheten for at rentenivået er over 7% sammenhengende i en 5-års periode eller mer?

m) Anta $a \cdot V_0 = 100000$ og $u = 70000$. Plott den simulerte sannsylighetsfordelingen til L_{30}. Hva er tapssannynligheten for banken $\Pr\{V_{30} < L_{30}\}$?

n) Gjenta m) med $\xi = 0.06$.

60	90314	93845	822	520
61	89492	93325	821	494
62	88670	92831	842	522
63	87828	92309	976	533
64	86852	91776	1137	742
65	85716	91035	1197	737
66	84518	90298	1365	852
67	83153	89447	1548	810
68	81606	88637	1543	904
69	80063	87733	1694	1081
70	78369	86652	1908	1069
71	76461	85583	2119	1137
72	74342	84446	2124	1444
73	72218	83003	2267	1492
74	69951	81511	2561	1595
75	67390	79915	2552	1839
76	64838	78077	2827	2083
77	62011	75994	2997	2321
78	59015	73673	3061	2454
79	55954	71219	3425	2596
80	52528	68623	3914	3069
81	48614	65554	4131	3186
82	44484	62368	4057	3457
83	40427	58912	3723	3689
84	36703	55223	4078	4086
85	32625	51137	3734	4157
86	28891	46980	3790	4246
87	25101	42733	3553	4494
88	21548	38239	3695	4581
89	17853	33658	3228	4641
90	14626	29017	2724	4475
91	11902	24543	2539	4150
92	9363	20393	2341	3849
93	7023	16544	1736	3372
94	5287	13172	1520	2997
95	3767	10175	1019	2561
96	2748	7615	1020	1908
97	1727	5707	667	1731
98	1061	3976	259	1210
99	802	2766	230	893

Filen Befolkningsdødlighet2004.txt for aldre fom 60 år.