Strukturering av investeringsporteføljer

En-periodemodell

Vi antar at det n investeringsalternativer, som vi nummererer $1, \dots, n$. Utfallet av hvert investeringsalternativ er stokastisk, og vi antar at det finnes en stabil sannsynlighetsfordeling for utfallet av den enkelte investering.

Vi innfører

$$R_i = \text{verdien av en enhet av eiendel } \underline{i} \text{ ved utløpet av perioden} \quad ; i=1,\dots,n$$

for å beskrive resultatet av investeringen. Vi skal anta at

$$\mu_i = ER_i \quad ; i=1,\dots,n$$
$$V_{ij} = \mathrm{Cov}(R_i,R_j) \quad ; i,j=1,\dots,n$$

er veldefinerte og endelige. Videre skal vi anta at V_{ij} er positiv definitt. (Dette er en triviell antagelse, når vi beskriver utfallet av investeringene bare gjennom deres forventninger og kovariansstrukturer. Hvis nemlig V ikke var positiv definitt ville det finnes lineær avhengighet mellom $\{\mathrm{Cov}(R_i,R_k)\}_{k=1,n}$ og $\{\mathrm{Cov}(R_j,R_k)\}_{k=1,n}$ for visse $\underline{i}$ og j, som vi kan si innebærer at investeringene i og j er "identiske" og dermed kan slås sammen. Det at vi sier at V er positiv definitt, innebærer derfor bare at vi har spesifisert aktivaklassene slik at de alle sammen er "ikke-identiske" i denne betydningen.)

—

Vi betrakter en "investor" ved periodens begynnelse. Investoren har et beløp I til disposisjon, som skal investeres i de ulike investeringskategoriene.

Hvis vi betegner

x_i = beløp investert i kategori $\underline{i}$; $i = 1, \ldots, n$

står investoren altså overfor en ~~budsjett~~ betingelse

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = I$$

Vi ville kalle

$$x = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$$

for <u>investeringsporteføljen</u>.

Ved utgangen av perioden er verdien av investeringsporteføljen:

$$R(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i = {}^t x R$$

der vi har innført:

$$R = {}^t(R_1, \ldots, R_n)$$

Utgangspunktet for analysen er at investoren vil ønske å "optimalisere" sin investeringsportefølje i en viss forstand: han vil velge x_i-ene slik at verdien på $R(x)$ blir "best mulig". I definisjonen av hva som er "optimalt" eller "best mulig" blir det sentralt at investeringsporteføljens verdi er stokastisk. Vi skal anta investoren tilstreber en "høyest mulig forventet verdi med lavest mulig risiko". Konkret innebærer dette at investoren må foreta en avveining mellom <u>forventning</u> og <u>risiko</u> for investeringens verdi ved slutten av perioden.

Vi skal formalisere dette dithen at investoren velger et nivå, r, for forventet verdi av sin investering. Investeringsporteføljen skal struktureres slik at dette forventede avkastningsnivået oppnås, samtidig som variansen til investeringens verdi blir lavest mulig. Dette kan uttrykkes ved at:

$$ER(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i = {}^t x \mu = r$$

der vi har innført

$$\mu = {}^t(\mu_1, \dots, \mu_n)$$

og vi skal søke å minimere

$$\operatorname{var} R(x) = \operatorname{var} \sum_i x_i R_i = \sum_{i,j} x_i x_j \operatorname{cov}(R_i, R_j)$$

$$= \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij} = {}^t x V x$$

der vi har innført V som symbol for kovariansmatrisen:

$$V = \{V_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$$

Optimaliseringsproblemet kan dermed formuleres som:

$$\min_x {}^t x V x$$

under bibetingelser

$${}^t x e = 1$$

$${}^t x \mu = r$$

der $e = {}^t(1, \dots, 1)$

For å løse dette optimeringsproblemet innfører vi Lagrange-multiplikatorene 2λ og 2ν, og minimerer

$$L = {}^t x V x - 2\lambda \cdot ({}^t x e - 1) - 2\nu \cdot ({}^t x \mu - r)$$

mhp. x, λ og ν.

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\sum_{j,k} x_j x_k V_{jk} - 2\lambda \cdot \big(\sum_j x_j - 1\big) - 2\nu \big(\sum_j x_j \mu_j - r\big)\Big]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\big(x_i^2 V_{ii} + 2\sum_{j \neq i} x_i x_j V_{ij}\big) - 2\lambda - 2\nu \cdot \mu_i$$

$$= \big(2x_i V_{ii} + 2\sum_{j \neq i} x_j V_{ij}\big) - 2\lambda - 2\nu \cdot \mu_i$$

$$= 2V_{(i)} \cdot x - 2\lambda - 2\nu \cdot \mu_i$$

der $V_{(i)}$ er den i'te linjen i matrisen V.
Vi får dermed

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad ; i = 1, .., n$$

$$\Updownarrow$$

$$V_{(i)} x - \lambda - \nu \cdot \mu_i = 0 \quad ; i = 1, .., n$$

$$\Updownarrow$$

$$Vx - \lambda \cdot e - \nu \cdot \mu = 0$$

Av $\frac{\partial}{\partial(2\lambda)} L = 0$ og $\frac{\partial}{\partial(2\nu)} L = 0$ får vi de opprinnelige betingelsene.

Den optimale investeringsporteføljen x^*, er derimot bestemt ved løsning av ligningssettet:

$$1)\quad Vx^* - \lambda^* e - \nu^* \mu = 0$$

$$2)\quad {}^t x^* e = 1$$

$$3)\quad {}^t x^* \mu = r$$

For å løse dette ligningssettet skal vi gå frem i to trinn, i det vi først skal se bort fra avkastningskravet. Vi kan da sette $\nu^* = 0$, og vi står igjen med å løse:

$$1')\quad Vx^{MIN} - \lambda^{MIN} e = 0$$

$$2')\quad {}^t x^{MIN} e = 1$$

Tolkningen av den løsningen vi her kommer frem til er "den rent variansminimerende porteføljen tilpasset budsjettbetingelsen." For å finne x^{MIN}, går vi frem på følgende måte:

Først "løses" 1') direkte mhp. x^{MIN}:

$$x^{MIN} = \lambda^{MIN} V^{-1} e$$

2') anvendt på x^{MIN} uttrykt på denne måten gir:

$$1 = {}^t x^{MIN} e = \lambda^{MIN}\, {}^t e V^{-1} e$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda^{MIN} = \frac{1}{{}^t e V^{-1} e}$$

Dette gir så for x^{MIN}:

$$x^{MIN} = \frac{1}{{}^t e V^{-1} e} V^{-1} e$$

Vi merker oss her at den minimerende variansen til porteføljens sluttverdi blir:

$$var^{MIN} = {}^t x^{MIN} V x^{MIN}$$

$$= \frac{1}{({}^t e V^{-1} e)^2} {}^t e V^{-1} V V^{-1} e = \frac{1}{{}^t e V^{-1} e} = \lambda^{MIN}$$

og den tilhørende forventningsverdi for porteføljens sluttverdi:

$$E(X^{MIN}) = {}^t x^{MIN} \mu = \frac{{}^t e V^{-1} \mu}{{}^t e V^{-1} e}$$

Vi går nå tilbake til løsningen av det gamle optimeringsproblemet, hvor vi også tar hensyn til kravet om forventningsverdien for porteføljens sluttverdi. Det er da hensiktsmessig (viser det seg) å skrive x^* på formen:

$$x^* = x^{MIN} + \nu^* \cdot z^*$$

$$1'')\quad V(x^{MIN} + \nu z^*) - \lambda^* e - \nu^* \cdot \mu = 0$$

$$2'')\quad {}^t e\,(x^{MIN} + \nu^* \cdot z^*) = 1$$

$$3'')\quad {}^t \mu\,(x^{MIN} + \nu^* \cdot z^*) = r$$

Som ved hjelp av løsningen for x^{MIN} fra 1) og 2') kan skrives:

$$1''')\quad z^* = \frac{1}{\nu} V^{-1} [\lambda^* \cdot e + \nu^* \cdot \mu - V x^{MIN}]$$

$$2''')\quad {}^t e\, z^* = 0$$

$$3''')\quad {}^t \mu\,(x^{MIN} + \nu^* \cdot z^*) = r$$

Hvis vi multipliserer med ${}^t e$ fra venstre i 1''') og benytter 2''') og 2''), får vi:

$$0 = {}^t e\, z^* = \frac{1}{\nu}[\lambda^* \cdot {}^t e V^{-1} e + \nu^* \cdot {}^t e V^{-1} \mu - 1]$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda^* \cdot {}^t e V^{-1} e + \nu^* \cdot {}^t e V^{-1} \mu = 1$$

Har vi fra 1'''):

$$z^* = V^{-1}[\mu + \frac{\lambda^*}{\nu^*} e - \frac{1}{\nu^*} V x^{MIN}]$$

$$= V^{-1}[\mu + \frac{\lambda^*}{\nu^*} e - \frac{1}{\nu^*} \frac{1}{{}^t e V^{-1} e} e]$$

$$= V^{-1}[\mu + \frac{1}{\nu^*}(\lambda^* - \frac{1}{{}^t e V^{-1} e}) e]$$

$$= V^{-1}[\mu + \frac{1}{\nu^*} \frac{\lambda^* \, {}^t e V^{-1} e - 1}{{}^t e V^{-1} e} e] =$$

$$= V^{-1}\left[\mu + \frac{1}{\nu^*}\left(-\nu \frac{{}^t e V^{-1}\mu}{{}^t e V^{-1} e} e\right)\right]$$

$$= V^{-1}\left[\mu - \frac{{}^t e V^{-1}\mu}{{}^t e V^{-1} e} e\right]$$

Dette gir følgende eksplisitte uttrykk for x^*:

$$x^* = x^{MIN} + \nu^* \cdot z^* = \frac{1}{{}^t e V^{-1} e} V^{-1} e + \nu^* \cdot V^{-1}\left[\mu - \frac{{}^t e V^{-1}\mu}{{}^t e V^{-1} e} e\right]$$

Her er ν uttrykt eksplisitt gjennom løsning av 3'''):

$${}^t\mu(x^{MIN} + \nu^* \cdot z) = r$$

$$\Downarrow$$

$$\nu^* = \frac{r - {}^t\mu x^{MIN}}{{}^t\mu z^*} = \frac{r - Er(x^{MIN})}{Er(z^*)}$$

Vi ser at x^* er dekomponert i to ledd via en lineær kombinasjon av:

- den rent variansminimerende portefølje
- en "porteføljekorreksjon" for tilpasning til avkastningskravet, som er direkte proporsjonal med avkastning utover den minimerende ("selvfinansierende portefølje")

Dette gir både en prinsipiell tolkning og en operasjonell fremgangsmåte for å bestemme mengden av effisiente porteføljer