UNIVERSITETET I OSLO
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet STK4500 v2009: Finans og forsikring

Prosjektoppgave, utlevering onsdag 27. mai kl. 9.00, innleveringsfrist fredag 29. mai kl. 14.00. Besvarelsen skal leveres i to eksemplarer i Ekspedisjonen i 7. etg. på Abel.

Sammen med besvarelsen av spørsmål som stilles i oppgaven skal kandidaten legge ved utskrift av programkode for de beregninger som besvarelsen bygger på.

Etterfølgende muntlig evaluering torsdag 4. juni i B91 og fredag 5. juni i B81 i henhold til liste for fordeling av kandidater til de to dagene som vil bli publisert på kursets hjemmeside tirsdag 2. juni.

For fastsettelse av endelig karakter teller skriftlig besvarelse 3/4 og muntlig 1/4.

Økt og økende levetid innebærer at pensjonsordningene i gjennomsnitt og forventningsmessig står overfor pensjonsutbetalinger av stadig lenger varighet. I denne oppgaven skal vi analysere hvordan økt levetid virker inn på pensjonssparing.

Vi skal se på innskuddsbasert alderspensjon for én enkelt arbeidstager. På tid 0 kommer arbeidstageren med i pensjonsordningen som nytt medlem i alder $x = 30$ år. Arbeidstagerens årslønn på tid t, L_t, er bestemt av følgende dynamikk:

$$L_t = (1+\lambda)^t \cdot L_0$$

For modellering av underliggende dødelighet – før vi tar i betraktning økt levetid/redusert dødelighet – skal vi ta utgangspunkt i en standard "statisk" Gompertz-Makeham dødsintensitet for en person i alder y, ν_y^{Stat}, gitt ved:

$$\nu_y^{Stat} = \alpha + \beta \cdot c^y$$

Økt levetid over tid modelleres ved en "dynamisk" dødsintensitet, $\nu_{(x)+t}^{Dyn}$, gitt ved:

$$\nu_{(x)+t}^{Dyn} = \nu_{x+t-\frac{1}{l}\cdot t}^{Stat} \,[1],$$

Denne modellen for reduksjon av dødeligheten over tid uttrykker at når personen som er x år gammel på tid 0 blir $(x+t)$ år gammel på tid t, så vil vedkommendes dødelighet være den samme som for en person som er $(x + t - \frac{1}{l} \cdot t)$ gammel på tid 0. Modellegenskapen kan komprimert uttrykkes som at "dødeligheten settes tilbake jevnt over tid med en takt lik ett år for hvert l'te år."

Personens gjenstående levetid etter å ha nådd alder $(x+t)$ skal vi betegne som $T_{(x)+t}$, og vi innfører $(x+t)$-åringens overlevelsessannsynlighet, ${}_sp_{(x)+t}$ i denne alderen:

$${}_sp_{(x)+t} = Pr\big[T_{(x)+t} > s\big]$$

Spsm. 1.

Vis at:

$${}_sp_{(x)+t} = e^{-s\alpha-\beta\cdot\frac{l}{l-1}\cdot\frac{c^{x+t-\frac{t}{l}}\cdot\left(c^{s-\frac{s}{l}}-1\right)}{\mathrm{Log}[c]}}$$

Spsm. 2.

Vis at overlevelsessannsynligheten i Spsm. 1 for grensetilfellet $l \to \infty$ samsvarer med overlevelses-sannsynligheten for den statiske dødelighetsmodellen. Kommentér.

Innskuddssparingen skal vi i første del av oppgaven anta at skjer i kontinuerlig tid som en fast andel av lønn, a, til enhver tid. Innskuddskontoen godskrives en sikker årlig rente, r, og dødelighetsarv i overensstemmelse med den dynamiske dødelighetsmodellen.

---

[1] [1] Notasjonen $((x)+t)$ i $\nu_{(x)+t}^{Dyn}$ er ment å tydeliggjøre at alderen $(x+t)$ alene ikke er tilstrekkelig for å spesifisere dødsintensiteten, men at det må presiseres at dødsintensiteten gjelder for en person som var i alder x på tid 0 og som på tid t er i alder $(x+t)$.

Spsm. 3.

Vis/forklar at innskuddskontoen i alder $(x+t)$, $K_{(x)+t}$, kan uttrykkes som:

$$K_{(x)+t} = a \cdot L_0 \cdot \int_0^t \frac{(1+\lambda)^s \cdot (1+r)^{t-s}}{{}_{t-s}p_{(x)+s}} ds$$

Ved nådd pensjonsalder, $(x+n)$, benyttes saldoen på innskuddskontoen til å kjøpe en garantert, livsvarig, kontinuerlig utbetalt livrente i et livsforsikringsselskap. For beregning av livrenten benytter livsforsikringsselskapet ekvivalensprinsippet, med dynamisk dødelighetsmodell som beskrevet i det foregående og med grunnlagsrente i.

Spsm. 4.

Vis/forklar at livrentebeløpet utgjør:

$$\frac{a \cdot L_0 \cdot \int_0^n \frac{(1+\lambda)^s \cdot (1+r)^{n-s}}{{}_{n-s}p_{(x)+s}} ds}{\int_0^{\omega-x-n} {}_sp_{(x)+n} \cdot (1+i)^{-s} ds}$$

For fastsettelse av innskuddet, a, tas det utgangspunkt i den statiske dødelighetsmodellen, at pensjonsnivået – dvs. livrentebeløpet i forhold til lønn ved pensjonering – skal utgjøre 20% og at pensjonsalderen er 67 år. Øvrige beregningsparametre her og i det følgende er:

$$L_0 = 300\,000$$

$$\lambda = 0{,}03$$

$$\alpha = 0{,}00007809$$

$$\beta = 0{,}00000719$$

$$c = 10^{0{,}04893}$$

$$r = 0{,}06$$

$$i = 0{,}03$$

Spsm. 5.

Vis at:

$$a = 0{,}0342806$$

Med dynamisk dødelighet vil det ikke lenger være forsikringsteknisk balanse mellom pensjonsnivå 20%, pensjonsalder 67 år og innskudd a som beregnet i Spsm. 5. Vi antar at innskuddet a og pensjonsnivået 20% skal opprettholdes, og at forsikringsteknisk balanse skal oppnås ved at vi regner med en høyere pensjonsalder enn 67 år.

Spsm. 6.

Regn ut hva den høyere pensjonsalderen må være for å oppnå slik forsikringsteknisk balanse, når vi regner med hhv. $l = 15, 10, 5$ år. Kommentér.

Spsm. 7.

Regn ut forholdstallet $\frac{\text{Forventet levetid som pensjonist}}{\text{Forventet levetid som yrkesaktiv}}$ med pensjonsalder avhengig av l som bestemt i Spsm. 6 for hhv. $l = \infty, 15, 10, 5$ år. Kommentér.

Vi skal nå utvide betraktningen ved å ta eksplisitt hensyn til virkningen av finansiell risiko i spareperioden. Beregningene som skal gjennomføres for denne delen av oppgaven vil blant annet omfatte stokastisk simulering av oppnådd avkastning i finansmarkedet. For slike simuleringsberegninger er det (som kjent!) hensiktsmessig å regne i diskret tid, og vi skal derfor gå over til å anta at innskuddene betales helårlig forskuddsvis, første gang på tid 0 og siste gang på årsdagen før man blir pensjonist. Pensjonsutbetalingen skal vi fortsatt regne med at løper i kontinuerlig tid.

Spsm. 8.

Vis at innskuddet kalibrert på samme måte som i Spsm. 5 da blir lik 0,0337543.

Det finansielle markedet antas å bestå av to finansielle eiendeler. En enhet av hver av eiendelene har verdier hhv. B_0 og S_0 på tid 0, og eiendelenes verdi på tid t, hhv. B_t og S_t , er bestemt av en to-dimensjonal Geometrisk Brownsk Bevegelse som følger:

$$B_t = B_0 \cdot exp\left[\left(\mu_B - \frac{\sigma_B^2}{2}\right) \cdot t + \sigma_B \cdot V_t\right]$$

$$S_t = S_0 \cdot exp\left[\left(\mu_S - \frac{\sigma_S^2}{2}\right) \cdot t + \sigma_S \cdot W_t\right]$$

$$(V_t, W_t) \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Gjennom resten av oppgaven skal vi benytte følgende parametrisering for beskrivelsen av finansmarkedet:

$$\mu_B = 0{,}05$$

$$\sigma_B = 0{,}05$$

$$\mu_S = 0{,}10$$

$$\sigma_S = 0{,}20$$

$$\rho = 0{,}40$$

Eiendelen med verdiutvikling S_t kaller vi aksjer og eiendelen med verdiutvikling B_t kaller vi obligasjoner.

I hele spareperioden er innskuddskontoen investert med en fast andel i aksjer ("aksjeandelen") og en fast andel i obligasjoner.

Spsm. 9.

Gjør rede for konseptet automatisk rebalansering som ligger til grunn for antagelsen om faste andeler i hhv. aksjer og obligasjoner.

Spsm. 10.

Vis at aksjevekten som tilsvarer forventet årlig avkastning lik $r = 0{,}06$ er $0{,}161947$.

Spsm. 11.

Finn, ved hjelp av Monte Carlo simulering, en tilnærming til sannsynlighetsfordelingen for pensjonsnivået ved fylte 67 år, når vi regner med den statiske dødelighetsmodellen og med slik aksjeandel som beregnet i Spsm. 10. Regn ut forventningsverdien og medianen i den tilnærmede sannsynlighetsfordelingen. Hva er (tilnærmet) sannsynligheten for at pensjonsnivået blir minst 20%? Kommentér.

Ifølge Lov om Obligatorisk Tjenestepensjon (OTP) skal innskuddsnivået i innskuddsbaserte tjenestepensjonsordninger være minimum 2% av lønn[2].

Spsm. 12.

Hva er (tilnærmet) sannsynligheten for at pensjonsnivået blir minst 20% med en slik OTP minimumsordning, når vi regner med den statiske dødelighetsmodellen og med slik aksjeandel som beregnet i Spsm. 10.
Kommentér.

Spsm. 13.

Når vi regner med at det er den dynamiske dødelighetsmodellen som gjelder, skal vi anta at personen tilpasser aksjeandelen i innskuddssparingen slik at forventet pensjonsnivå ved 67 år blir lik 20%. Regn ut hva aksjeandelen kalibrert på denne måte må være for hhv. $l = \infty, 15, 10, 5$ år. Kommentér.

Spsm. 14.

Vis i samme grafiske fremstilling tilnærminger til sannsynlighetstettheten for pensjonsnivået med slik kalibrering av aksjeandelen som i Spsm. 13. for hhv. $l = \infty, 15, 10, 5$ år. Kommentér.

[2] I realiteten 2% av den delen av lønn som overstiger folketrygdens grunnbeløp, men som en forenkling regner vi med 2% av hele lønnen i denne oppgaven.