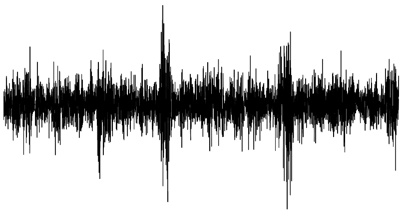
Oppgavesamling i STK 4500



Pål Lillevold og Dag Svege

17. februar 2006

1 Diversifisering

Vi betrakter er portefølje av identiske livrenter for N liv som alle er i samme alder x. Livrenten utbetales helårig forskuddsvis livsvarig og med oppsettelsestid k år. Årlig utbetaling er konstant og lik 1. Kontantverdien til livrenten for person i i porteføljen er gitt ved den stokastiske variabelen

$$K_i = \sum_{t=k}^{\lfloor T_x^{(i)} \rfloor} v_t \cdot I(T_x^{(i)} \geq k)$$

der $T_x^{(i)}$ er gjenstående levetid for vedkommende, notasjonen $\lfloor \xi \rfloor$ er nærmeste heltall lavere eller lik ξ og v_t er den neddiskonterte verdien i dag av en enhet utbetalt om t år.

Ved Monte Carlo simulering skal du finne en tilnærmet sannsynlighetsfordeling for gjennomsnittet til kontantverdiene av livrenteutbetalingene i porteføljen, dvs en tilnærmet sannsynlighetsfordeling for den stokastiske variabelen

$$P = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_i$$

Dette skal gjøres under to ulike modelleringer av oppnådd avkastning på investeringene:

- Deterministisk og med

$$\frac{v_{t+1}}{v_t} = \exp\left(-\mu\right), t = 1, 2, ..$$

- Stokastisk, og med

$$\frac{v_{t+1}}{v_t} = \exp\left(-\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \sigma \cdot Z_t\right) \; , Z_1, Z_2, ...u.i.d. \sim N(0,1)$$

  Vis at forventet avkastning i den stokastiske modellen blir lik avkastningen i den deterministiske modellen.

For levetidsfordelingen regner vi med en ren Gompertz dødsintensitet slik at gjenstående levetid kan simuleres ved hjelp av funksjonen

$$T_x = \frac{\log\left(1 - \frac{\log(c)\cdot\log(u)}{\beta\cdot c^x}\right)}{\log(c)} \; , u \sim U(0,1)$$

Lag beregningsprogrammet slik at parameterene $(N, x, k, \mu, \sigma, \beta, c)$ kan velges som parameterverdier. For konkrete beregninger skal vi sette

$$(x, k, \mu, \sigma, \beta, c) = (50, 17, 0.055, 0.056, 0.0000202, 1.1015)$$

mens antall forsikrete skal kunne varieres: $N \in \{1, 2, ..., 20\}$.

Den asymptotiske fordelingen til P når antall forsikrete går mot uendelig er gitt ved forventningsverdien. Vis at

$$\mathrm{E}(P \mid v_1, v_2, v_3, ...) = \sum_{t=k}^{\infty} v_t \cdot {}_t p_x$$

Sammenlikn standardavviket i den asymptotiske fordelingen, som kun tar hensyn til finansiell usikkerhet, med standardavviket i sannsynlighetsfordelingen, som tar hensyn til både demografisk usikkerhet (levetid) og finansiell usikkerhet.