2 Aksje/ obligasjon

Vi har to stokastiske variable,

$$\begin{aligned} S_t &= \text{verdi av aksje etter tid } t \\ B_t &= \text{verdi av obligasjon etter tid } t \end{aligned}$$

Startverdiene (S_0, B_0) er kjente og vi antar at den simultane sannsynlighetsfordelingen er gitt ved:

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \exp\left[\left(\mu_S - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)t + \sigma_S \cdot V_t\right] \\ B_t &= B_0 \exp\left[\left(\mu_B - \frac{\sigma_B^2}{2}\right)t + \sigma_B \cdot W_t\right] \\ (V_t, W_t) &\sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Vi studerer den stokastiske variabelen for forholdstallet mellom aksjekurs og obligasjonskurs etter tid t

$$Z_t = \frac{S_t}{B_t}$$

Vis at

$$Z_t = Z_0 \exp\left[\left(\alpha - \frac{\beta^2}{2}\right)t + \beta\sqrt{t} \cdot U_t\right]$$

der

$$\begin{aligned} U_t &\sim N(0,1) \\ \alpha &= (\mu_S - \mu_B) + \sigma_B(\sigma_B - \rho \cdot \sigma_S) \\ \beta^2 &= \sigma_S^2 + \sigma_B^2 - 2 \cdot \sigma_S \cdot \sigma_B \cdot \rho \end{aligned}$$

$\Phi(\cdot)$ er den kumulative fordelingsfunksjonen til standard normalfordelingen. Vis at:

$$\Pr\{\frac{Z_t}{Z_0} > k\} = \Phi\left(\left(\alpha - \frac{\beta^2}{2} - \frac{\log(k)}{t}\right)\frac{\sqrt{t}}{\beta}\right)$$

og at:

$$\Pr\{\frac{Z_t}{Z_0} > 1\} > \frac{1}{2} \iff \mu_S - \frac{\sigma_S^2}{2} > \mu_B - \frac{\sigma_B^2}{2}$$

Plott $\Pr\{Z_t > k\}$ og sannsynlighetstettheten til Z_t, $f(k)$, for $t \in [0, 40]$ for følgende parametere:

$$
\begin{aligned}
S_0 &= 1 \\
B_0 &= 1 \\
\mu_S &= 0.10 \\
\mu_B &= 0.05 \\
\sigma_S &= 0.20 \\
\sigma_B &= 0.05 \\
\rho &= 0.40 \\
k &= 1
\end{aligned}
$$

Anta aksjen har forventet avkastning i og standardavvik s pr. tidsenhet. Vis at

$$
\begin{aligned}
\mu &= \log(1+i) \\
\sigma &= \sqrt{\log\left(1 + \left(\frac{s}{1+i}\right)^2\right)}
\end{aligned}
$$

og illustrer grafisk sammenhengen mellom i og μ og mellom s og σ. Vis at

$$
Cov\left\{\frac{S_{t+1} - S_t}{S_t}, \frac{B_{t+1} - B_t}{B_t}\right\} = \exp[\mu_S + \mu_B] \cdot (\exp[\rho \cdot \sigma_S \cdot \sigma_B] - 1)
$$

og illustrer grafisk sammenhengen mellom $Corr\left\{\frac{S_{t+1}-S_t}{S_t}, \frac{B_{t+1}-B_t}{B_t}\right\}$ og ρ.