UNIVERSITETET I OSLO
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet STK4500 v2010: Finans og forsikring

Prosjektoppgave, utlevering tirsdag 15. juni kl. 9.00, innlevering torsdag 17. juni kl. 14.00. Besvarelsen i to eksemplarer leveres i ekspedisjonen i 7. etasje.

Sammen med besvarelsen av spørsmål som stilles i oppgaven skal kandidaten legge ved utskrift av programkode for de beregninger som besvarelsen bygger på.

Erklæring om selvstendig besvarelse, datert og undertegnet, skal også leveres sammen med besvarelsen.

Etterfølgende muntlig evaluering torsdag 24. juni og fredag 25. juni i henhold til publisert liste for fordeling av kandidater til de to dagene.

For fastsettelse av endelig karakter teller skriftlig besvarelse 3/4 og muntlig 1/4.

I denne oppgaven skal vi analysere risikomessige egenskaper ved innskuddsbasert pensjon, en modifisert innskuddsbasert pensjon med avkastningsgaranti og en alternativ pensjonsordning som kombinerer reguleringsprinsippene for innskuddsbasert og ytelsesbasert pensjon.

For alle typer pensjonsordninger står vi overfor det samme finansielle markedet som består av to finansielle eiendeler. En enhet av hver av eiendelene har verdier hhv. B_0 og S_0 på tid 0, og eiendelenes verdi på tid t, hhv. B_t og S_t , er bestemt dels ved at B_t følger en deterministisk geometrisk utvikling, mens S_t følger en Geometrisk Brownsk Bevegelse:

$$B_t = B_0 \cdot exp[\mu_B \cdot t]$$

$$S_t = S_0 \cdot exp\left[\left(\mu_S - \frac{\sigma_S^2}{2}\right) \cdot t + \sigma_S \cdot V_t\right]$$

$$V_t \sim N(0, \sqrt{t})$$

Gjennom hele oppgaven skal vi benytte følgende parametrisering for beskrivelsen av finans-markedet:

$$\mu_B = 0{,}05$$

$$\mu_S = 0{,}10$$

$$\sigma_S = 0{,}20$$

Eiendelen med verdiutvikling S_t kaller vi aksjer og eiendelen med verdiutvikling B_t kaller vi obligasjoner.

Vi skal se på arbeidsgivers kostnader ved å finansiere fremtidig alderspensjon for én enkelt arbeidstager. På tid 0 kommer arbeidstageren med i bedriftens pensjonsordning som nytt medlem i alder $x = 30$ år. Pensjonsalderen er $x + n = 65$ år. Arbeidstagerens årslønn på tid t, L_t, er bestemt av følgende stokastiske dynamikk:

$$L_0 = 300\ 000$$

$$L_t = (1 + \lambda) \cdot L_{t-1} + \theta \cdot \delta_t \cdot L_{t-1}; t = 1, \dots, n \text{ med } \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\ u.i.d. \sim N(0,1)$$

$$\lambda = 0{,}03$$

$$\theta = 0{,}015$$

Vi antar stokastisk uavhengighet mellom V_t på den ene side og $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ på den annen side.

For sammenligning av kostnaden ved å finansiere fremtidig alderspensjon skal vi regne ut kontantverdien på tid 0 av de løpende innskudds/premiekostnader fra opptak i pensjonsordningen til siste premiebetaling. For denne kontantverdiberegningen skal vi regne med diskonteringsrente (årlig) $r = 0{,}06$.

Vi begynner med å betrakte en innskuddsbasert pensjon hvor det betales innskudd helårlig forskuddsvis fra opptak i pensjonsordningen til året før nådd pensjonsalder med $100 \cdot p^I\%$ av årslønn til enhver tid. Med P_t^I som notasjon på innskudd på tid t, er følgelig:

$$P_t^I = p^I \cdot L_t; t = 0, \dots, n-1$$

Vi skal regne med innskuddssats lik 6%, dvs.:

$$p^I = 0{,}06$$

Saldoen på innskuddskontoen akkumuleres med avkastning som oppnås i finansmarkedet og uten dødelighetsarv. Ved nådd pensjonsalder benyttes saldoen som da er akkumulert til å sikre en livsvarig helårlig forskuddsvis utbetaling av fremtidig alderspensjon, der beregningsgrunnlaget[1] har grunnlagsrente $i = 0{,}03$ og dødsintensitet $\nu_{x+t} = \beta \cdot c^{x+t}$ i alder $x + t$, der:

$$\beta = 0{,}0000202$$

$$c = 1{,}1015$$

Vi antar at innskuddskontoen allokeres med en andel 20% i aksjer og 80% i obligasjoner til enhver tid, og at det ikke er noen transaksjonskostnader ved kjøp og salg av disse verdipapirene.

Spsm. 1. Redegjør for rebalanseringen som må gjennomføres for å opprettholde et slikt fast innbyrdes forhold 20%/80% mellom aksjer og obligasjoner.

Spsm. 2. Finn ved Monte Carlo simulering en tilnærming til sannsynlighetsfordelingen for innskuddsordningens pensjonsnivå, målt som forholdet mellom sikret årlig pensjonsytelse og årlig lønn ved nådd pensjonsalder, og illustrer denne tilnærmede sannsynlighetsfordelingen grafisk. Hva er forventning og standardavvik i den tilnærmede sannsynlighetsfordelingen?

Spsm. 3. Finn ved Monte Carlo simulering en tilnærming til sannsynlighetsfordelingen for kontantverdien av årlig innskudd, og illustrer denne tilnærmede sannsynlighetsfordelingen grafisk. Hva er forventning og standardavvik i den tilnærmede sannsynlighetsfordelingen?

Vi modifiserer nå innskuddsordningen ved å introdusere avkastningsgaranti: Avkastningen som godskrives innskuddskontoen skal være det høyeste av avkastningen som oppnås i finansmarkedet og en garantert årlig avkastning r^g. Vi betegner dette innskuddsordning med avkastningsgaranti.

Vi skal nå studere pensjonsnivå og pensjonskostnader i innskuddsordningen med avkastningsgaranti, og sammenligne med innskuddsordningen uten avkastningsgaranti. For alternativet med avkastningsgaranti skal *innskuddssatsen tilpasses slik at forventningsverdien til pensjonsnivået er det samme som uten avkastningsgaranti*.

Spsm. 4. Gjør rede for hvorfor det bør benyttes samme underliggende stokastiske scenarier for hhv. finansmarkedsutvikling og lønnsutvikling i sammenligningen.

Spsm. 5. For de tre alternativene $r^g = 0.00, r^g = 0.015$ og $r^g = 0.03$ finn ved Monte Carlo simulering en tilnærming til sannsynlighetsfordelingene for pensjonsnivået til innskuddsordningen med avkastningsgaranti, og illustrer de tilnærmede sannsynlighetsfordelingene grafisk. Hva er den tilpassede innskuddssatsen for de tre alternativene, og hva er standardavviket til pensjonsnivået. Kommentér.

For sikring og finansiering av avkastningsgarantien antas det nå at det betales en årlig forskuddsvis premie til leverandøren og at leverandøren med dette overtar ansvaret for å innfri

[1] Med grunnlagsrente $i = 0{,}03$ og finansmarked og allokering som beskrevet, vil det i utbetalingstiden oppstå "avkastningsoverskudd" som kan gi grunnlag for oppregulering av den løpende pensjonsubetalingen. I oppgaven fokuserer vi på pensjonsytelsen som kan sikres ved nådd pensjonsalder, og vi kan da se bort fra virkningen av slik mulig regulering.

avkastningsgarantien med endelig virkning. Premien for avkastningsgarantien bestemmes ved Black Scholes.

Spsm. 6. Hva er premien for avkastningsgarantien, regnet pr. enhet, for de tre alternativene $r^g = 0{,}00$, $r^g = 0{,}015$ og $r^g = 0{,}03$?

Spsm. 7. Finn ved Monte Carlo simulering en tilnærming til sannsynlighetsfordelingen for kontantverdien av samlet årlig innskudds/premiebetaling for de tre alternativene $r^g = 0.00, r^g = 0.015$ og , $r^g = 0.03$.og illustrer de tilnærmede sannsynlighetsfordelingene grafisk. Hva er forventning og standardavvik i de tilnærmede sannsynlighetsfordelingene? Sammenlign med forventning og standardavvik i **Spsm. 3** og kommenter.

Et annet alternativ for sikring og finansiering av avkastningsgarantien er at manglende avkastning i finansmarkedet i forhold til avkastningsgarantien dekkes av arbeidsgiver.

Spsm. 8. Finn ved Monte Carlo simulering en tilnærming til sannsynlighetsfordelingen for kontantverdien av samlet årlig innskudds/premiebetaling for alternativet $r^g = 0{,}015$ og illustrer den tilnærmede sannsynlighetsfordelingen grafisk. Hva er forventning og standardavvik i den tilnærmede sannsynlighetsfordelingen? Sammenlign med resultatene i **Spsm. 7** og kommenter (Hjelp til sammenligning med **Spsm. 7** er at Black Scholes prisen for avkastningsgarantien med $r^g = 0{,}015$ er 0,003341).

Vi introduserer nå et alternativt reguleringskonsept for innskuddskontoen, som består i at endringen i saldoens verdi fra tid t (etter at kontoen på dette tidspunktet er blitt godskrevet med innskuddet) til tid $(t+1)$ skal være $Max\left[f_1 \cdot \left(0{,}2 \cdot \frac{S_{t+1}-S_t}{S_t} + 0{,}8 \cdot \frac{B_{t+1}-B_t}{B_t}\right), f_2 \cdot \frac{L_{t+1}-L_t}{L_t}\right]$. f_1 og f_2 er parametre som det må settes verdier på for en konkretisering av reguleringskonseptet.

Spsm. 9. Hvordan vil du i ord beskrive hva som ligger i dette reguleringskonseptet? (Tips: Se hvilke modeller vi ender opp med i ytterpunktene $\{f_1 = 1, f_2 = 0\}$ og $\{f_1 = 0, f_2 = 1\}$)

Spsm. 10. Anta at $f_2 = 1$. Bestem (tilnærmet) ved Monte Carlo simulering hvilken verdi av f_1 som resulterer i samme forventede pensjonsnivå som i innskuddsordningen uten avkastningsgaranti når vi regner med samme innskuddssats som i denne ordningen ($p^I = 0{,}06$).

Vi antar at reguleringen sikres og finansieres ved at forskjellen mellom avkastning i finansmarkedet og reguleringskostnaden dekkes av arbeidsgiver (og at arbeidsgiver blir godskrevet denne differansen dersom oppnådd avkastning er høyere enn kostnaden ved regulering).

Spsm. 11. For alternativet $f_2 = 1$ og f_1 som du fant i **Spsm. 10** finn ved Monte Carlo simulering en tilnærming til sannsynlighetsfordelingen for kontantverdien av samlet årlig innskudds/premie-betaling og illustrer den tilnærmede sannsynlighetsfordelingen grafisk. Hva er forventning og standardavvik i den tilnærmede sannsynlighetsfordelingen? Sammenlign med resultatene i **Spsm. 8** og kommenter.