UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK4500/9500 — Livsforsikring og finans
Eksamensdag:	10. juni 2024
Tid for eksamen:	15:00 – 19:00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Denne eksamensoppgaven består av fire oppgaver. Den første er av teoretisk art, mens de tre andre forblir mer anvendt. Bestreb deg etter å være rigorøs og tydelig når du benytter matematiske resultater og formler. Vennligst skriv tydelig, ryddig og unngå skribling.

Oppgave 1 Teori (2 points)

Svar på de følgende teoretiske spørsmål, under den settingen du selv foretrekker: diskret eller kontinuerlig tid.

(a) (0.5p) Definer begrepene *nåverdi*, *retrospektiv verdi* og *prospektiv verdi* til en betalingsstrøm og forklar hva de beskriver.

(b) (0.5p) Definer begrepene *polisefunksjoner* og *polisebetalingsstrøm* og gi en fortolkning av disse. NB: husk å definere og forklare alle elementene du benytter.

(c) (1p) Forklar begrepet *aktuariell reserve* med matematisk terminologi.

Oppgave 2 Livsvarig uførepensjon (2 points)

Betrakt en livsvarig uførepensjon med tilstander $\{*, \diamond, \dagger\}$ og (konstant) overgangsrater $\mu_{*\diamond}, \mu_{*\dagger}, \mu_{\diamond\dagger}$ ($\mu_{\diamond *} = 0$). Konstante overgangsrater er ikke en realistisk antagelse, men det gjør det mulig å få eksplisitte uttrykk. Vink: du kan ha nytte av å vite at løsningen til differensiallikningen: $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$, $x(s) = x_0$, $s \geq t \geq 0$ er gitt ved $x(t) = e^{-\int_t^s a(u)du}\left(x_0 - \int_t^s b(u)e^{\int_u^s a(v)dv}du\right)$.

(a) Finn eksplisitte uttrykk for overgangssannsynlighetene $p_{**}(t,s)$, $p_{\diamond\diamond}(t,s)$ og $p_{*\diamond}(t,s)$, $t < s$.

(Fortsettes på side 2.)

(b) Betrakt en forsikringspolise med (konstant) teknisk rente $r = 3\%$, maturitet $T = 10$ og alder til den forsikrede $z = 50$ år. Anta at $\mu_{*\dagger} = \mu_{\diamond\dagger} = 0.003$ og $\mu_{*\diamond} = 0.01$. Beregn engangspremien til denne uførepolisen som utbetaler en årlig pensjon på $D = 200\,000$ norske kroner, kontinuerlig.

Oppgave 3 Kapitalkrav (4 points)

Se for deg en livsforsikring i kontinuerlig tid, som betaler en ytelse på B pengeenheter i tilfelle dødsfall av den forsikrede før kontraktutløp, eller en ytelse på E pengeenheter dersom den forsikrede overlever kontraktperioden. Som vanlig, betegner Z den tidskontinuerlige Markovprosessen med tilstandsrom $\mathcal{Z} = \{*, \dagger\}$ som modellerer helsetilstandene til poliseinnehaveren. La τ betegne dødstidspunktet til poliseinnehaveren fra konstraktstart. Dødelighet er en deterministisk tidsavhengig funksjon $\mu(t)$ slik at $\lim_{t\to\infty} \int_0^t \mu(u)du = \infty$.

Polisespesifikasjoner: Kontraktutløpstid T år fra nå. Kunden er z år gammel ved kontraktstart. Teknisk diskonteringsfaktor er $v(t)$ som står for dagens verdi til en pengeenhet som er planlagt utbetalt ved tid $t \geq 0$.

(a) Vis at den betingede tetthetsfunksjonen til $\tau|\tau > t$ er gitt ved

$$f_{\tau|\tau>t}(s|t) = \mu(z+s)e^{-\int_t^s \mu(z+u)du}, \quad s \geq t.$$

og til $\tau|\tau \leq t$ er gitt ved

$$f_{\tau|\tau\leq t}(s|t) = \frac{\mu(z+s)e^{-\int_0^s \mu(z+u)du}}{1 - e^{-\int_0^t \mu(z+u)du}}, \quad 0 \leq s \leq t.$$

(b) La C betegne polisebetalingsstrømmen. Vis at for enhver $t \in [0, T]$, er retrospektiv verdi $V^-(t, C)$ og prospektiv verdi $V^+(t, C)$ til denne polisen gitt ved følgende uttrykk,

$$V^-(t,C) = E\mathbb{I}_{\{T\}}(t)\mathbb{I}_{(T,\infty)}(\tau) + B\frac{v(\tau)}{v(t)}\mathbb{I}_{[0,t]}(\tau),$$
$$V^+(t,C) = E\frac{v(T)}{v(t)}\mathbb{I}_{(T,\infty)}(\tau)\mathbb{I}_{[0,T)}(t) + B\frac{v(\tau)}{v(t)}\mathbb{I}_{(t,T]}(\tau).$$

Anta i resten av oppgaven at dødeligheten er konstant $\mu > 0$. Dette er en urealistisk antagelse, men den gjør det mulig å få eksplisitte formler.

(c) Vis at de forventede retrospektive verdiene for hver tilstand i denne polisen er gitt ved

$$V_*^-(t,C) = E\mathbb{I}_{\{T\}}(t), \quad t \in [0,T],$$

(Fortsettes på side 3.)

og

$$V_{\dagger}^{-}(t,C) = e^{rt}\frac{B\mu}{r+\mu}\frac{1-e^{-(r+\mu)t}}{1-e^{-\mu t}}, \quad t \in [0,T].$$

og gi en fortolkning av disse størrelsene.

(d) *Solvenskapitalkrav* eller *betalingsdyktighetskapitalkrav* i begynnelsen av kontrakten er definert ved verdien u_α slik at

$$\mathbb{P}[V^{+}(0,C) > u_\alpha] = \alpha,$$

for et passelig og ønskelig lite tall α. Vanligvis, $\alpha = 0.005$.

Utled en formel for kapitalkravet u_α som aktuaren er nødt til å sette av for å forsikre seg en betalingsdyktighet på nivå α, i forhold til parameterne i modellen. Du kan fint anta at $Ee^{-rT} < Be^{-rT} < u_\alpha < B$, siden en annen antagelse enn denne er neppe meningsfull i praksis.

Oppgave 4 Garantert arv (2 points)

Et individ ønsker å investere C_0 pengeenheter i et investeringsfond. Porteføljen består av et risikofritt aktivum hvis verdi ved tid t er gitt ved $B(t)$ (en sparekonto) og et investeringsfond med risiko hvis verdi ved tid t er gitt ved $S(t)$. Forsikringsselskapet vil allokere, ved enhver tid s, andelen $\delta(s) \in [0,1]$ i sparekontoen og resten i investeringsfondet. Kontrakten varer i evig tid og kundens etterlatte får utbetalt verdien av investeringen i tilfelle dødsfall av den forsikrede.

La $v(t)$ betegne diskonteringsfaktoren som tilsvarer sparekontoen med (konstant) rente r, dvs. du kan anta at $B(t) = \frac{1}{v(t)}$. I tillegg, er $p(z+t, z+s)$ og $\mu(z+s)$, henholdsvis, overlevelsessannsynlighet og dødelighet til kunden som er z år gammel ved kontraktstart.

Avslutningvis er investeringsfondet modellert av Black-Scholes-modellen med konstant rente r (samme som sparekontoen) og konstant volatilitet σ.

(a) Beregn den forventede prospektive verdien til denne forsikringen.

Hva er engangspremien? Kan du utdype?

(b) Anta videre at forsikringsselskapet tilbyr kunden et garantert beløp på G pengeenheter, hvilket betyr at etterlatte vil få, i verste fall, dette beløpet, dersom investeringene faller under det. Beregn engangspremien igjen (du kan godt la uttrykket være i form av integral av kjente formler) og utdyp om forskjellen mellom denne settingen og den i deloppgave (a). Vink: gjør om ytelsen slik at man kan uttrykke det som en *call*-opsjon og resten.

LYKKE TIL!

(Fortsettes på side 4.)